

Федеральное агентство по образованию
Российский государственный геологоразведочный университет

А.А.НИКИТИН, А.В.ПЕТРОВ

**«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ
ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ»**

Допущено УМО по образованию в области прикладной геологии в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 130200 «Технологии геологической разведки», специальность 130201 «геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых» .

МОСКВА 2008

Аннотация

ББК 26.325.22.1

С51

Никитин А.А, Петров А.В. «Теоретические основы обработки геофизической информации» учебное пособие – Москва, Издательство 2008, 112 стр.

В пособии излагаются теория и основные методы обработки геофизических данных с использованием спектрального и корреляционно-регрессионного анализа, линейных, включая оптимальные и адаптивные, фильтров, статистической теории обнаружения слабых сигналов, классификационных алгоритмов и методов распознавания образов для комплексного анализа геофизических наблюдений.

Учебное пособие рекомендуется при изучении курса лекций по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации». Оно может быть полезно для магистрантов, аспирантов и специалистов, изучающих применение статистических методов в геофизических исследованиях.

Рецензент доктор технических наук, профессор, заведующих кафедрой разведочной геофизики и компьютерных систем РГУ нефти и газа Серкер Серкер Акберович.

Оглавление.

Оглавление.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА I. Оценка статистических и градиентных характеристик геофизических полей.....	6
1.1. Статистические характеристики геополей.....	8
1.2. Градиентные характеристики геополей.....	9
ГЛАВА II. Корреляционно-регрессионный анализ и его применение.....	11
2.1. Корреляция и регрессия.....	11
2.2. Линейная регрессия и ее применение.....	13
2.3. Нелинейная регрессия и ее применение.....	15
2.3. Множественная регрессия и ее применение.....	16
ГЛАВА III. Метод главных компонент и его применение.....	17
3.1. Содержание метода главных компонент.....	17
3.2. Метод главных компонент при оценке региональной составляющей поля.....	19
ГЛАВА IV. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ.....	23
4.1. Автокорреляционная функция и ее применение.....	23
4.2. Взаимно корреляционная функция и ее применение.....	28
4.2. Двумерные корреляционные функции.....	31
ГЛАВА V. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.....	33
5.1. Спектры дискретно заданного сигнала.....	34
5.2. Спектры непрерывных сигналов.....	38
5.3. Спектры стационарного случайного процесса.....	39
5.4. Свойства преобразований Фурье.....	41
5.5. Применение спектрального анализа при обработке геофизических данных.....	42
5.6. Вейвлет-анализ геофизических полей.....	45
ГЛАВА VI. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ.....	47
6.1. Понятие о линейном фильтре. Оператор свертки.....	48
6.2. Двумерные линейные фильтры.....	50
6.3. Адаптивные фильтры.....	52
6.3.1. Одномерная адаптивная фильтрация.....	53
6.3.2. Двухмерная адаптивная фильтрация.....	57
6.3.3. Полиномиальная адаптивная фильтрация.....	60
ГЛАВА VII. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ.....	62
7.1. Фильтр Колмогорова-Винера и его применение.....	63
7.1.1. Выделение аномалий антиклинального типа в гравirazведке.....	65
7.1.2. Построение обратного фильтра.....	66
7.1.3. Построение фильтра прогнозирования.....	68
7.2. Согласованный фильтр.....	68
7.3. Энергетический фильтр.....	72
ГЛАВА VIII. ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ.....	75
8.1. Основные понятия теории статистических решений.....	76
8.2. Критерии принятия статистических решений.....	78
8.3. Коэффициент правдоподобия и вероятности ошибок I и II рода.....	81
8.4. Надежность обнаружения сигнала и ее применение.....	83
8.4. Способ обратных вероятностей.....	86
8.5. Способ межпрофильной корреляции.....	89
8.6. Способ самонастраивающейся фильтрации.....	93
8.7. Многомерные аналоги метода обратных вероятностей и самонастраивающейся фильтрации.....	96
8.7.1. Многомерный способ обратных вероятностей.....	96
8.7.2. Многомерный способ самонастраивающейся фильтрации.....	98
ГЛАВА IX. Обработка комплексных геофизических наблюдений.....	99
9.1. Методы классификации многомерных наблюдений.....	99
9.1.1. Метод динамических сгущений (k-средних).....	100
9.1.2. Методом общего расстояния.....	102
9.1.3. Метод разделения многомерных, нормальных смесей.....	103
(По Петрову А.В.).....	103
9.2. Методы распознавания образов в задачах интерпретации геофизических наблюдений.....	105
9.3. Метод главных компонент при расчете комплексного параметра.....	108
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	111
Литература.....	113

ВВЕДЕНИЕ

В связи с естественным сокращением фонда легко открываемых месторождений полезных ископаемых возникает необходимость поисков слабоконтрастных и малоразмерных объектов, в том числе и на больших глубинах. При этом эффективность геофизических методов в значительной степени определяется полнотой извлечения полезной информации из экспериментальных данных.

Приемы обработки геофизической информации, полученной при наблюдениях физических полей на разных уровнях исследований (космос - воздух - земля - скважина), не зависят от природы экспериментальных данных в отличие от методов интерпретации, которые специфичны для каждого геофизического метода и определяются соответствующими уравнениями теории поля.

При обработке геофизических данных особое значение приобретает вероятностно-статистический подход, в то время как при интерпретации данных используются методы детерминированного подхода, при котором практически игнорируется искажающая роль помех.

Применение вероятностно-статистического подхода при обработке геоданных обусловлено характерной особенностью геофизических наблюдений, заключающейся в том, что полученные в отдельных точках данные следует рассматривать как случайные величины и процессы. Случайно также расположение разнообразных геологических объектов, точек наблюдений и даже площадей наблюдений, поскольку при съемках другими исполнителями, проведенных в другое время могут изменяться контуры площадей и положение точек сети измерений. Но самое главное, из-за наложения помех, вызванных погрешностями измерений, геологическими неоднородностями, неучтенными вариациями полей и другими причинами, само физическое поле реализуется случайным образом.

Именно поэтому подавляющее большинство методов обработки базируется на математическом аппарате вероятностно-статистического подхода.

В настоящем пособии рассмотрены наиболее распространенные приемы и методы обработки геофизической информации, включающие:

- оценки статистических и градиентных атрибутов геофизических полей;
- методы корреляционно-регрессионного анализа геополей;
- спектральный и вейвлет анализ геофизических наблюдений;
- методы линейной оптимальной фильтрация геополей;
- способы обнаружения слабых сигналов на основе теории статистических решений;

-классификационные алгоритмы, методы распознавания образов и компонентный анализ при обработке и интерпретации многопризнаковых геолого-геофизических наблюдений;

Поскольку обработка массовых геофизических данных в настоящее время реализуется исключительно на компьютерах, то в заключение пособия приводятся ссылки на программное обеспечение, рассмотренных приемов и алгоритмов, реализованных в компьютерной технологии статистического и спектрально-корреляционного анализа данных «КОСКАД 3D».

ГЛАВА I. Оценка статистических и градиентных характеристик геофизических полей.

Одним из условий эффективного применения математических методов в определенной прикладной области является учет свойственных ей характерных особенностей. Использование математического аппарата без учета этого приводит к заведомо отрицательным результатам. В полной мере это касается применения методов вероятностно-статистического подхода, применяемых в процессе обработки и интерпретации геофизических данных.

Характерной чертой геолого-геофизических наблюдений является то, что они являются пространственно-временными, то есть любое измерение значения параметра, в общем случае, сопровождается набором атрибутов, определяющих его координаты в пространстве X, Y, Z и время наблюдения t . Другой важнейшей особенностью геофизических измерений является то, что выборки, получаемые в результате наблюдений случайного параметра в различных точках наблюдения, не являются однородными и представлены набором нескольких случайных величин. Это связано с естественным изменением статистических характеристик геополей в пространстве, то есть их *статистической нестационарностью*. Таким образом, изменяя состав выборки посредством отбора точек наблюдения в соответствии с их пространственным расположением, можно получать различные оценки статистических параметров, что в итоге приводит к неоднозначности конечных результатов.

При обработке геоданных часто приходится строить гистограммы. Гистограмма описывает распределение частот (или частостей) $p_i = m_i / n_i$, определяемых для каждого значения X_i случайной величины X . Для построения гистограммы весь диапазон значений X разбивается на определенное число разрядов и подсчитывается число значений случайной величины m_i , приходящееся на каждый i -й разряд, которое затем нормируется на общее число значений случайной величины. По оси абсцисс для гистограммы откладываются разряды, соответствующие определенному диапазону значений случайной величины, а по оси ординат – соответствующие этим разрядам частоты (или частости) p_i . В результате получают ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, которую и называют *гистограммой* рис.1,1.(а).

На основе гистограммы строится также *статистическая функция распределения*, называемая еще кумулятивной кривой. Если середины разрядов на

гистограмме обозначить через $x_1, x_2, \dots, x_r$, то функция распределения F будет выражена как

$$F(x_1) = \frac{m_1}{n}, F(x_2) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}; \dots, F(x_r) = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_r}{n}$$

При построении гистограмм не существует строго обоснованных методов определения числа разрядов r . Обычно пользуются одним из трех эмпирических правил: 1) определяют $r = \sqrt{n}$; 2) r находят по интервалу группирования данных Δx , равного двойной или тройной погрешности измерения атрибута; 3) r определяют по величине Δx , вычисляемой *по формуле Стреджеса*:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,32 \lg n} \quad (1.1)$$

В каждом разряде гистограммы должно быть не менее пяти значений атрибута, в противном случае проводится объединение разрядов. Число разрядов также обычно не менее пяти.

Построение гистограмм и статистических функций распределений является основой обработки данных физических свойств горных пород и количественных атрибутов геофизических полей.

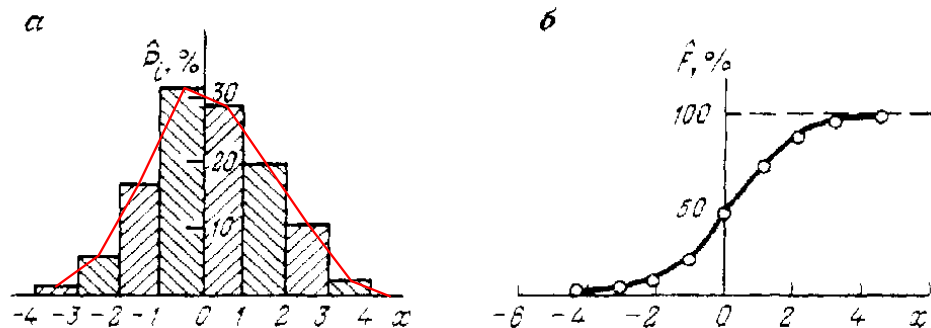


Рис.1.1. Гистограмма (а) и кумулятивная кривая случайной величины (б).

Кроме гистограмм, для графического представления того или иного распределения случайной величины, строят **кумулятивную кривую (кривая накопленных частот)**. В прямоугольной системе координат строят точки с координатами $(x_i, \sum_{k \leq i} p_k)$. Полученные точки соединяют отрезками рис.1.1(б). Если соединить ломаной линией центры вершин прямоугольников составляющих гистограмму, то получится кривая, получившая название **полигон**.

1.1. Статистические характеристики геополей.

Математической моделью при вычислении статистических атрибутов геофизических данных является случайная величина X , принимающая ряд дискретных значений $X_1, X_2, \dots, X_n$. Такими значениями могут быть представлены измерения физических свойств горных пород и физических полей. Для оценки статистических характеристик последних, чаще всего, реализуется методика скользящего окна, что естественно и связано со статистической нестационарностью геополей. При измерениях поля по профилю, по трассе, по скважине окно - одномерное и содержит n -значений случайной величины, при площадных измерениях и при анализе временного разреза окно – двумерное, при обработке трехмерных данных окно трехмерное.

Для случайной величины X могут быть получены различные статистические характеристики. В настоящее время наиболее распространенным термином для статистических характеристик является **атрибут**. В качестве таких статистических атрибутов, рассчитываемых в скользящем окне, используются:

-среднее значение $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$;

-дисперсия $D = \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$;

-среднеквадратическое отклонение $\sigma = \pm \sqrt{D}$;

-асимметрия $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3 / \sigma^3$;

-эксцесс $E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4 / \sigma^4 - 3$;

-медиана Me или квантиль порядка 0,5, при котором вероятность P значений случайной величины X , больших или меньших Me равны, т.е. $H(X < Me) = P(X > Me) = 0,5$;

-коэффициент вариации $V = \sigma / \bar{X}$.

-энтропия $H = -\sum_{i=1}^K p_i \log_2 p_i$ где p_i - частость i -го интервала группирования, а

K - число интервалов группирования.

Перечисленные выше статистические атрибуты широко используются при анализе как потенциальных, так и волновых полей. Среднее значение оказывается эффективным при выделении регионального тренда, дисперсия характеризует энергию поля, среднеквадратическое отклонение оценивает разброс вокруг среднего,

асимметрия и эксцесс подчеркивают определенные детали поля, в частности, тектонические дислокации. В общем случае, при интерпретации полей статистических атрибутов, за исключением поля среднего значения, основной интерес представляют области их экстремальных значений. Их выделение позволяет более эффективно решать актуальную задачу районирования исследуемых территорий на стационарные области, по геофизическим данным, так как экстремальные значения статистических атрибутов, за исключением среднего значения, контролируют области нарушения статистической нестационарности геополей, которые в свою очередь приурочены к геологическим границам или тектоническим зонам.

Энтропия характеризует степень сложности (беспорядка) явления или объекта. Чем выше показатель энтропии, тем сложнее явление. Применительно к геофизике это означает, что если показатель энтропии стремится к нулю, то мы имеем дело с однородным полем. Это дает возможность проводить статистическое районирование по показателю энтропии (границы областей стационарности геополей будут характеризоваться зонами максимальных градиентов энтропии, в то время как сами объекты будут отмечаться относительно малыми значениями энтропии).

1.2. Градиентные характеристики геополей.

Известно, что для детализации особенностей поведения любой математической функции (определения точек перегиба, экстремальных значений и т.д.) в математике используются ее производные первого и высших порядков. В случае функции двух переменных вычисляются ее производные по направлению или градиенты. Очевидно, что знание статистических оценок градиентов геофизических полей также позволит исследователю детализировать особенности поля и подчеркнуть границы аномальных объектов. Вычисление оценок *градиентных характеристик* в окрестностях каждой точки исходной сети наблюдения позволяет получить поля градиентов исходного поля.

При анализе градиентных характеристик площадных геолого-геофизических наблюдений обычно вычисляется градиент поля вдоль простирания профилей $\Delta x = \partial f / \partial x$, вкрест простирания профилей $\Delta y = \partial f / \partial y$, полный градиент $\Delta_{xy} = \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2}$ и его направление $\alpha = \arctg(\Delta y / \Delta x)$.

Так как геофизические поля не являются непрерывными функциями, то использование стандартных математических приемов для оценки их производных невозможно. Для оценки градиентных характеристик геополей существуют несколько вычислительных алгоритмов. Как показывает практика их использования, наиболее

эффективные оценки градиентов получаются при использовании алгоритма, заключающегося в расчете, по методу наименьших квадратов¹, аппроксимирующего полинома первой степени по трем точкам поля - анализируемой и двумя соседними с ней (соответственно по пикетам для градиента вдоль профилей и профилям для градиента вкрест простирания профилей).

В случае трехмерных наблюдений, кроме градиентов Δx и Δy можно оценить градиент по оси z (высоте или глубине) $\Delta z = \partial f / \partial z$. В этом случае формула для расчета полного градиента примет вид: $\Delta f = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Направления полного градиента в пространстве для трехмерного случая определяется двумя углами. Первый в плоскости пикетов и профилей $\alpha = \arctg(\Delta y / \Delta x)$ и второй, между полным градиентом в плоскости пикетов и профилей и градиентом вдоль оси z : $\beta = \arctg(\Delta_{xy} / \Delta z)$.

Анализ результатов обработки большого количества реальных геолого-геофизических наблюдений позволяет сделать следующие выводы, которые необходимо учитывать при интерпретации полей градиентных характеристик:

-границы аномальных объектов отмечаются экстремумами в полях градиентов вдоль осей и максимумами в поле полного градиента;

-экстремумами, в полях градиентных характеристик, отмечаются границы аномалий различных амплитуд, что позволяет при визуализации увидеть одновременно контуры аномалий различной амплитуды;

-градиентные характеристики вдоль определенного направления позволяют подчеркнуть границы аномалий, простирание которых перпендикулярно этому направлению;

-поле направления полного градиента позволяет оценить простирание аномалий в каждой точке исходной сети наблюдений, а контрастные переходы, от минимальных значений к максимальным значениям, контролируют положение осей аномалий;

Наряду с градиентными характеристиками, при обработке и интерпретации геофизических данных часто используется величина *коэффициента анизотропии* поля G / G_{90} . Здесь G - значение полного (максимального) градиента поля в точке, G_{90} - значение градиента поля в направлении, перпендикулярном направлению полного градиента G . На практике, для оценки анизотропных свойств поля, используется величина $\log_{10}(G / G_{90} + 1)$. Это связано с тем, что величина отношения

¹ В главе 2 подробно рассматриваются метод наименьших квадратов и вопросы полиномиальной аппроксимации геофизических наблюдений.

G/G_{90} часто принимает очень большие значения, при близких к нулю значениях знаменателя G_{90} .

В процессе интерпретации необходимо учитывать, что большие значения анизотропии обычно позволяют трассировать границы аномалий, которые обычно соответствует областям нарушения стационарности поля. Минимумы коэффициента анизотропии практически трассируют экстремальные (минимальные или максимальные) значения поля, соответствующие положению осей аномалий.

ГЛАВА II. Корреляционно-регрессионный анализ и его применение.

Важной задачей обработки геофизических данных является изучение зависимостей между физическими свойствами и атрибутами. Например, между различными физическими свойствами горных пород, между показаниями различных методов, между разными статистическими атрибутами. Другой распространенной задачей обработки является сглаживание, интерполяция и аппроксимация исходных или преобразованных данных. Эти задачи решаются на основе корреляционно-регрессионного анализа.

Математической моделью корреляционно-регрессионного анализа служит система случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_N$

2.1. Корреляция и регрессия.

Зависимость, при которой изменение одной случайной величины вызывает изменение распределения другой, называется *статистической*. При статистической зависимости различают *корреляцию*² для установления взаимосвязи между двумя или более случайными величинами с оценкой тесноты этой связи, и *регрессию*, при которой устанавливается форма (характер) зависимости между случайными величинами, чаще всего в виде полиномов.

Оценка тесноты связи производится путем расчета *коэффициента ковариации* b_{xy} , равного для двух случайных величин x и y :

$$b_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.1)$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ - средние значения величин x и y .

² Слово *correlation* переводится с английского языка как схожесть в изменениях, таким образом, под корреляцией понимается степень схожести или связи в изменении двух процессов.

Поскольку размерности x и y могут быть разные, то вычисляют **коэффициент корреляции** обычно в виде

$$r_{xy} = \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.2)$$

где σ_x и σ_y - среднеквадратические отклонения X и Y .

Коэффициент корреляции (2.2) изменяется от -1 до +1. При $r_{xy} > 0$ корреляция положительна, при $r_{xy} = 0$ корреляция отсутствует, при $r_{xy} < 0$ говорят о наличии обратной корреляции между двумя случайными величинами.

В общем случае, когда число значений x_i и y_i различно, коэффициент корреляции вычисляется по формуле:

$$r_{xy} = \frac{1}{n\sigma_x\sigma_y} \sum_i \sum_j n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$$

где n_{ij} - число значений, принимающих одновременно величины x_i и y_j , n - общее число x_i и y_j .

В том случае, когда число случайных величин больше двух ($N > 2$), корреляция оценивается либо по ковариационной матрице B , равной:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

где b_{ij} - коэффициенты ковариации, причем $b_{ij} = b_{ji}$, а по диагонали матрицы (2.3) расположены дисперсии случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_N$, либо по корреляционной матрице R , равной

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

где r_{ji} - коэффициенты корреляции, $r_{ij} = r_{ji}$. Обе матрицы (2.3) и (2.4) симметричны относительно главной диагонали.

Под **регрессией** понимают сглаживание экспериментальной зависимости по методу наименьших квадратов. Метод наименьших квадратов состоит в минимизации

суммы квадратов отклонений сглаживающей прямой (кривой) $\varphi(x_i)$ от экспериментальной зависимости y_i , т.е.

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i))^2 \Rightarrow \min$$

где φ_i может быть линейная $(a_0 + a_1 x_i)$, нелинейная $(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)$ или множественная $(a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i})$ регрессия.

Метод наименьших квадратов приводит к системе нормальных уравнений для нахождения коэффициентов регрессии $a_0, a_1, a_2, \dots$

Эта система уравнений в матричной форме выражается следующим образом

$$X'XA = X'Y \quad (2.5)$$

где X - матрица значений исходных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_N$; X' - транспонированная к X матрица; A - матрица-столбец коэффициентов регрессии $a_0, a_1, \dots$; Y - матрица-столбец случайной величины Y , для которой устанавливается форма (вид) регрессии, обычно в виде полинома.

На базе регрессионного анализа решаются две основные задачи: а) установление формы корреляционной связи, т.е. вида регрессии; б) оценка тесноты корреляционной связи. Ниже рассматриваются различные виды регрессий путем решения системы уравнений (2.5).

2.2. Линейная регрессия и ее применение.

Линейной регрессией между величинами X и Y называется корреляционная (статистическая) зависимость вида $y_i = a_0 + a_1 x_i$ (2.6)

$$\text{Матрица } X \text{ в системе (2.5) равна } \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{vmatrix} \text{ соответственно матрица } X' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

$$\text{Матрица } A = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \end{vmatrix}, \text{ матрица } Y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{vmatrix}. \text{ Перемножение матриц } X' \text{ и } X \text{ дает:}$$

$$X'X = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix}.$$

Перемножение матриц X' и Y равняется $X'Y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}.$

Тогда выражение для нахождения коэффициентов a_0 и a_1 в (2.6) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \end{bmatrix}, \text{ т.е. система нормальных уравнений будет:}$$

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum x &= \sum y \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 &= \sum xy, \end{aligned}$$

отсюда находим:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}; \\ a_1 &= \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}. \end{aligned}$$

Величина a_1 определяет угловой коэффициент прямой линии регрессии между X и Y и называется коэффициентом регрессии. Между коэффициентом регрессии a_1 и коэффициентом корреляции r_{xy} имеется связь в виде $a_1 \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = r_{xy}$.

Коэффициент корреляции оценивает тесноту линейной связи. Чем больше его величина, тем связь теснее, при $r_{xy} = \pm 1$ связь становится аналитической.

Линейная регрессия широко используется при определении значений одного физического свойства по известным значениям другого. Так, скорость V продольных волн можно определить по плотности горных пород $\sigma_{пл.}$. Впервые оценка взаимосвязи скорости и плотности была получена Н.Н.Пузыревым в виде $v = 6\sigma_{пл.} - 11$.

Б.М.Уразаевым для эффузивных и метаморфических пород были найдены зависимости $v = 3,64\sigma_{пл.} - 4,73$ и $v = 2,47\sigma_{пл.} - 1,55$. Эти связи обычно меняются в зависимости от возраста пород и района исследований.

2.3. Нелинейная регрессия и ее применение.

Нелинейной (криволинейной) регрессией называется любая зависимость, отличная от линейной. В качестве примера рассмотрим параболическую регрессию второго порядка: $y_i = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2$. Система нормальных уравнений (2.5) при этом записывается в виде:

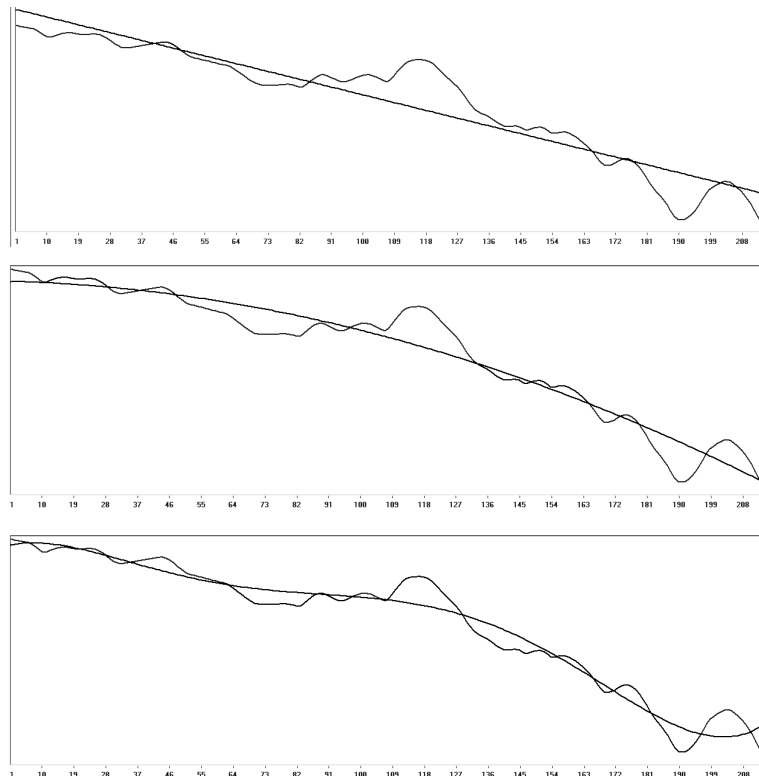
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

После перемножения матриц получаем

$$\begin{bmatrix} n & \sum x & \sum x^2 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2 y \end{bmatrix},$$

а система нормальных уравнений принимает вид:

$$\begin{aligned} a_0 n + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 &= \sum y \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 &= \sum xy \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 &= \sum x^2 y. \end{aligned}$$



а)

б)

в)

Рис.2.1. Пример линейной регрессии (а), нелинейной регрессии второй степени (б) и нелинейной регрессии пятой степени (в).

Как линейная, так и нелинейная регрессии используются для оценки регионального тренда геофизических данных.

2.3. Множественная регрессия и ее применение.

Множественная регрессия получается при исследовании связи между несколькими (тремя и более) величинами. Линейная множественная регрессия Y на X_1 и X_2 имеет вид

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}.$$

Система нормальных уравнений для нахождения коэффициентов a_0, a_1, a_2 в матричной форме (2.5) записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} \\ 1 & x_{12} & x_{22} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

После перемножения матриц получаем:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix}$$

$$a_0 n + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 = \sum y$$

$$a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1 x_2 = \sum x_1 y$$

$$a_0 \sum x_2 + a_1 \sum x_1 x_2 + a_2 \sum x_2^2 = \sum x_2 y$$

Теснота связи оценивается по величине множественного коэффициента корреляции R , которая определяется из выражения $R_{k+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i r_{iy}}$, где r_{iy} - коэффициент корреляции величины x_i с y , а значения коэффициентов b_i находятся из решения системы линейных уравнений вида $R\vec{b} = \vec{r}$. В этой системе R - корреляционная матрица, составленная из коэффициентов парной корреляции r_{ij} между x_i и x_j . Для

линейной регрессии $y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i}$ матрица $R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix}$. Тогда уравнение $R\vec{b} = \vec{r}$

примет вид $R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1y} \\ r_{2y} \end{bmatrix}$, из которого получаем

$$b_1 + b_2 r_{12} = r_{1y}$$

$$b_1 r_{12} + b_2 = r_{2y}$$

Из последней системы находим коэффициенты

$$b_1 = \frac{r_{1y} - r_{12} r_{2y}}{1 - r_{12}^2}; \quad b_2 = \frac{r_{2y} - r_{12} r_{1y}}{1 - r_{12}^2}$$

Следовательно, множественный коэффициент корреляции

$$R_3 = \sqrt{b_1 r_{1y} + b_2 r_{2y}} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 - 2r_{12} r_{1y} r_{2y} + r_{2y}^2}{1 - r_{12}^2}}$$

Множественная линейная регрессия успешно используется для определения глубины залегания складчатого фундамента H_i по данным гравиразведки (Δg_i) и магниторазведки ΔT_i в виде: $H_i = a_0 + a_1 \Delta g_i + a_2 \Delta T_i$

Множественная регрессия широко применяется для построения петрофизических моделей продуктивных залежей углеводородов по данным геофизических исследований скважин. Так, для месторождений Южного Мангышлака использование данных о сопротивлении ρ_k по значениям каротажа КС, интенсивности нейтронного гамма каротажа $I_{НГК}$ и скорости v_p по акустическому каротажу приводит к регрессии вида: $\sigma_{плотнос.} = 2,28 + 0,28 \lg \rho_k + 0,36 I_{НГК} - 0,017 v_p$ при коэффициенте множественной корреляции $R=0,75$.

ГЛАВА III. Метод главных компонент и его применение

3.1. Содержание метода главных компонент.

Метод главных компонент в настоящее время представляет эффективный аппарат комплексного анализа геоданных, и его программное обеспечение является составной частью многих компьютерных технологий по обработке геофизической информации.

Математической моделью метода служит, как и для корреляционно-регрессионного анализа, система случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_N$. При этом каждая случайная величина обычно содержит n – наблюдений, т.е. исходный массив геоданных представлен матрицей X размерностью $n \times N$:

$$X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1N} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nN} \end{vmatrix}$$

В качестве числа N может быть число профилей съемки, и тогда с помощью главных компонент решается задача оценки регионального тренда (региональной составляющей). Если число N представлено совокупностью различных методов и атрибутов, то путем метода главных компонент решается задача комплексного анализа по разделению исследуемой территории на классы.

Значение n определяет число точек наблюдений по отдельным профилям съемки. Суть метода главных компонент состоит в переходе от системы случайных величин $x_1, \dots, x_N$ к новой системе случайных величин $y_1, \dots, y_N$, ориентируясь на поведение дисперсий y_i . При этом главная компонента определяется как линейная комбинация исходных случайных величин x_i ,

$$y_j = \sum_{i=1}^N a_{ij} x_i; \quad j = 1, \dots, N \quad (3.1),$$

причем первая главная компонента y_1 :

$$y_1 = \sum_{i=1}^N a_{i1} x_i \quad (3.2)$$

обладает максимальной дисперсией среди всех возможных линейных комбинаций вида (3.1).

Величины a_{ij} являются коэффициентами перехода от одной системы случайных величин x_i к другой системе случайных величин y_i . Дисперсии линейных комбинаций y_i располагаются в убывающем порядке, т.е. $\sigma^2(y_1) > \sigma^2(y_2) > \dots > \sigma^2(y_N)$.

Переход от системы величин x_i к системе y_j сопровождается нормировкой коэффициентов a_{ij} в виде $\sum_{i=1}^N a_{ij}^2 = 1$. Математически метод главных компонент сводится либо к вычислению ковариационной матрицы B системы случайных величин x_i , если все x_i измерены в одних и тех же единицах, либо к вычислению корреляционной матрицы R , если случайные величины x_i измерены в разных физических единицах.

Первый случай соответствует измерениям одного и того же поля по N -профилям съемки, второй случай соответствует измерениям N -разных полей и (или) их атрибутов.

Далее для матрицы B или матрицы R находятся их собственные значения λ_1 и соответствующие этим собственным значениям собственные векторы, которыми являются коэффициенты перехода a_{ij} .

Обычно ограничиваются вычислением первых двух-трех главных компонент, поскольку в этих компонентах сосредоточена основная энергия исходных данных. Так,

первая главная компонента содержит 70-90% всей энергии (дисперсии) поля или дисперсий совокупности атрибутов при комплексном их анализе.

Физическое истолкование главных компонент является весьма неоднозначным. Однако первая главная компонента практически всегда имеет однозначное истолкование, поскольку ее дисперсия отражает основную энергию поля при обработке данных по площади или энергию нескольких полей и (или) их атрибутов при комплексном анализе данных.

Ниже рассматриваются алгоритмы метода главных компонент при решении задач комплексного анализа геоданных и оценки региональной составляющей одного поля.

3.2. Метод главных компонент при оценке региональной составляющей поля.

Выделение регионального тренда является распространенной процедурой обработки практически для всех методов геофизики. Однако при решении этой задачи приходится задавать те или иные параметры. Так, при осреднении поля в скользящем окне надо задать размеры окна, при пересчете поля на высоту надо задать высоту пересчета, при оценке региональной составляющей путем регрессии надо задать степень полинома регрессии и т.д.

Метод главных компонент не требует задания той или иной априорной информации. Единственное предположение, при котором происходит применение метода главных компонент, состоит в том, что региональная составляющая обладает наибольшей дисперсией по сравнению с локальными составляющими, что обычно на практике выполняется.

Алгоритм оценки региональной составляющей на основе метода главных компонент сводится к реализации следующих процедур:

1. Вычисление средних значений поля по каждому профилю $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ki}$, где n – число точек наблюдений, $i=1, \dots, N$, N – число профилей, и ковариаций данных различных пар профилей $b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_i)(x_{kj} - \bar{x}_j)$, $i, j=1, \dots, N$. Поскольку система $x_1, \dots, x_N$ представлена измерениями одного и того же поля, нет необходимости рассчитывать коэффициенты корреляции, которые используются при комплексном анализе данных, измеренных в разных физических единицах.

2. Составление ковариационной матрицы исходных данных по их коэффициентам ковариаций b_{ij}

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} \end{bmatrix},$$

Матрица B симметрична относительно главной диагонали, т.е. $b_{ij} = b_{ji}$, а по диагонали расположены дисперсии значений поля каждого профиля.

3. Нахождение максимального собственного значения $\lambda_{\max}$ из уравнения

$$|B - \lambda_{\max} I| = 0 \quad \text{или} \quad |B - \lambda_{\max} I| = \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda_{\max} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda_{\max} & \dots & b_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} - \lambda_{\max} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т.е. после}$$

раскрытия определителя из этого уравнения достаточно найти его корень с максимальным значением $\lambda_{\max}$.

4. Вычисление значений собственного вектора матрицы $(B - \lambda_{\max} I)$, соответствующего максимальному собственному значению $\lambda_{\max}$ из системы линейных

$$\text{уравнений } (B - \lambda_{\max} I)\vec{a}_1 = 0 \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda_{\max} & b_{12} & \dots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda_{\max} & \dots & b_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NN} - \lambda_{\max} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{N1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Значения собственного вектора $\vec{a}_1$ определяются с учетом нормировки $\sum a_{i1}^2 = 1$. Физический смысл этой нормировки состоит в том, чтобы преобразованные данные, т.е. значения региональной составляющей, не отличались бы по масштабу от исходных значений поля, а физический смысл значений a_{i1} заключается в определении весовых коэффициентов для каждого профиля.

5. Нахождение значений первой главной компоненты $y_1 = \sum_{i=1}^N a_{i1} x_i$ т.е.

$$y_{1k} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{N1}) \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \cdot \\ y_{1n} \end{bmatrix}$$

Физический смысл значений первой главной компоненты $y_{1k} (k=1, \dots, n)$ состоит в том, что они определяют весовые коэффициенты для каждого пикета исходных данных, аналогично тому, как значения $a_{i1} (i=1, \dots, N)$ определяют весовые коэффициенты для каждого профиля съемки.

6. Оценка региональной составляющей исходного поля характеризующейся наибольшей дисперсией. Эта оценка равна произведению вектора-столбца y_{1i} на вектор-строку a_{i1} с добавлением к каждому элементу образующейся матрицы среднего значения поля по профилю $\bar{x}_i$, т.е.

$$x_{ki}^{peg} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{1n} \end{bmatrix} (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{N1}) + \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} y_{11}a_{11} + \bar{x}_1 & y_{11}a_{21} + \bar{x}_2 & \dots & y_{11}a_{N1} + \bar{x}_N \\ y_{21}a_{11} + \bar{x}_1 & y_{12}a_{21} + \bar{x}_2 & \dots & y_{12}a_{N1} + \bar{x}_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{N1}a_{11} + \bar{x}_1 & y_{1n}a_{21} + \bar{x}_2 & \dots & y_{1n}a_{N1} + \bar{x}_N \end{bmatrix}$$

Поскольку значения x_{ki}^{peg} представляют оценку региональной составляющей, то разность $x_{ki}^{ост} = x_{ki} - x_{ki}^{peg}$ оценивает поле локальных составляющих.

Эффективность метода главных компонент иллюстрируется на рис.3.1(стр.95), на котором приведены исходное поле силы тяжести (а), оценка региональной составляющей (б) и локальная составляющая (в). Пунктиром на рисунке показана область рудного объекта.

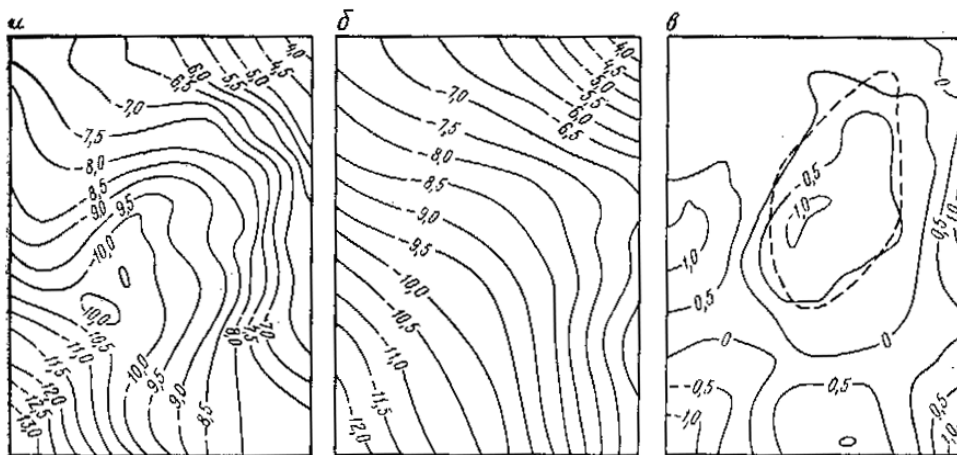


Рис.3.1. Исходное поле силы тяжести (а), оценка региональной составляющей (б) и локальной составляющей (в) с использованием метода главных компонент.

Метод главных компонент эффективен при обработке данных на достаточно ограниченных площадях, поскольку не учитывается изменение корреляционных свойств, т.е. структуры корреляционных матриц, по площади.

Следует отметить эффективность применения метода главных компонент при решении задач интерполяции. При этом задача интерполяции физического поля, представленного в виде функции двух переменных x и y , сводится к интерполяции функций, зависящих от одного аргумента. Однако чаще всего метод главных компонент используется при решении задач комплексного анализа данных (см. раздел 9.3).

ГЛАВА IV. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ.

Математической моделью геофизических полей при построении и изучении их корреляционных функций является случайный процесс. Применение модели случайного процесса для описания геофизических данных, полученных по профилям, трассам сейсмограмм и скважинам существенно расширяет круг решаемых при обработке задач.

Наблюдаемые значения геофизических полей вдоль профиля, отдельные сейсмограммы, стационарные наблюдения определенных геофизических параметров во времени – можно считать реализациями различных, случайных функций. Этот факт логично предполагает использование в процессе обработки и интерпретации геолого-геофизической информации аппарата теории случайных функций.

Важнейшими характеристиками любой случайной функции, имеющими прикладное значение, являются ее корреляционные функции. Ниже рассматриваются корреляционные характеристики для дискретных, случайных процессов, которые более часто встречаются в практике геолого-геофизических наблюдений. При этом основные понятия и формулы для расчета корреляционных характеристик геополей приводятся с учетом специфики особенностей геолого-геофизических информации.

Применение модели случайного процесса для описания геолого-геофизических данных существенно расширяет круг решаемых при обработке и интерпретации задач.

4.1. Автокорреляционная функция и ее применение.

Автокорреляционная функция (АКФ) характеризует степень корреляционной связи между отдельными значениями наблюдений, представленными в виде случайного процесса и расположенными на некотором удалении друг от друга.

Применительно к геофизическим данным АКФ представляет характеристику связи между значениями поля, отстоящими друг от друга на m - дискретов, т.е. дискретов по x или по t . АКФ является функцией аргумента $m\Delta x$ или $m\Delta t$, где Δx - шаг по профилю, Δt - шаг по трассе сейсмограммы, т.е. $\Delta = 1$.

АКФ рассчитывается по формуле:

$$R(m) = \frac{1}{n - |m|} \sum_{i=1}^{n-|m|} (f_i - \bar{f})(f_{i+m} - \bar{f}) \quad (4.1)$$

где f_i - значение поля в i -той точке профиля (трассы, скважины); n – число точек наблюдений; m – интервал, принимающий последовательно значения

$0; \pm\Delta; \pm2\Delta; \dots \pm M\Delta$, которые выражают расстояния между значениями поля f_i и f_{i+m} ; $\bar{f}$ - среднее значение поля по профилю, трассе и т.д.

Для $m=1$, сумма в выражении 4.1 представляет собой сумму произведений центрированных³, значений поля соседних точек профиля:

$$R(1) = \frac{1}{N-1} (\bar{f}_1 \bar{f}_2 + \bar{f}_2 \bar{f}_3 + \dots + \bar{f}_{n-1} \bar{f}_n) \quad (4.2)$$

здесь $\bar{f}_i = f_i - f_{cp.}$, то есть центрированное значение поля на i -ом пикете профиля;

Для $m=2$, сумма в выражении 4.1 представляет собой сумму произведений центрированных значений поля, удаленных друг от друга на один пикет:

$$R(2) = \frac{1}{N-2} (\bar{f}_1 \bar{f}_3 + \bar{f}_2 \bar{f}_4 + \dots + \bar{f}_{n-2} \bar{f}_n) \quad (4.3)$$

Для любого $m=k$, ($k < N$) имеем:

$$R(k) = \frac{1}{N-k} (\bar{f}_1 \bar{f}_{1+k} + \bar{f}_2 \bar{f}_{2+k} + \dots + \bar{f}_{n-k} \bar{f}_n) \quad (4.4)$$

По построению АКФ является четной функцией, т.е. $R(m) = R(-m)$. Ввиду четности АКФ обычно рассчитывается лишь для $m \geq 0$.

При $m=0$ значение АКФ представляет собой оценку дисперсии изучаемого поля, при $m=\Delta$ АКФ выражает связь значений поля для соседних пикетов (дискретов) и представляет собой оценку коэффициента корреляции для этих значений, при $m=2\Delta$ АКФ выражает связь между значениями поля, отстоящими друг от друга на два дискрета и т.д.

На практике часто используются нормированные значения автокорреляционных функций $R_n(m)$. При этом нормирование осуществляется на $R(0)$:

$$R_n(m) = \frac{R(m)}{R(0)} \quad (4.5)$$

Можно показать, что оценка нормированных значений автокорреляционной функции, при достаточном объеме выборки (количестве точек на профиле⁴) обладает следующими *свойствами*:

1. $R_n(0) = 1$
 2. $|R_n(m)| \leq 1$
- (4.6)

³ Если из значений случайной величины вычесть ее математическое ожидание (среднее), то полученная таким образом, случайная величина называется центрированной.

⁴ Обычно получают достаточно достоверные оценки автокорреляционных функций при $N \geq 30$. При этом оценки вычисляются для смещений, не превышающих половины длины реализации (профиля) $m \leq N/2$.

3. Автокорреляционная функция является четной, то есть $R_n(m) = R_n(-m)$, поэтому при оценках автокорреляционных функций обычно ограничиваются ее значениями для неотрицательных значений аргумента $m \geq 0$.

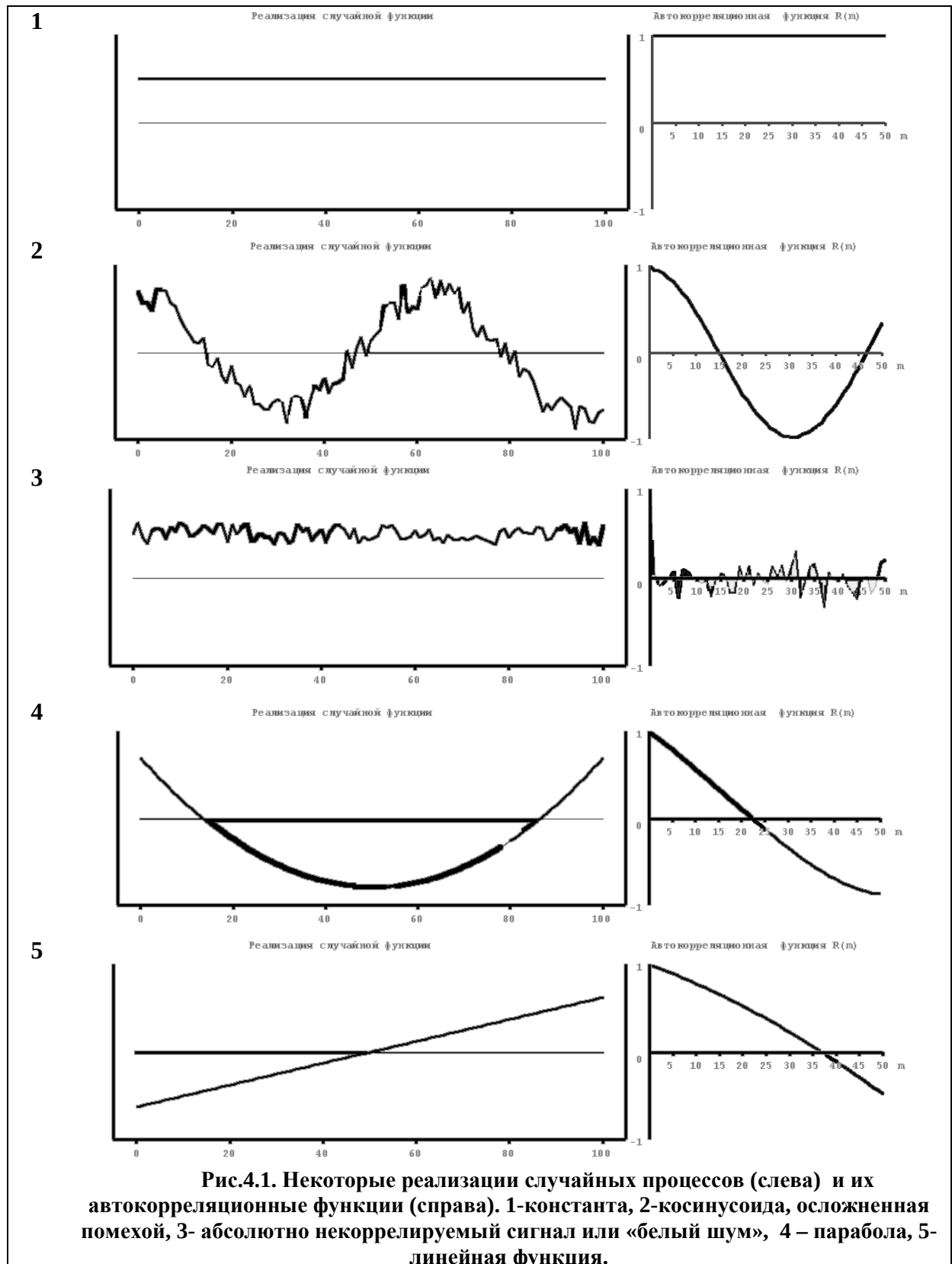
4. Два случайных процесса $F_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ и $F_2 = \{kf_1, kf_2, \dots, kf_n\}$ отличающиеся только постоянным множителем k , имеют один и тот же вид нормированной автокорреляционной функции $R_n(m)$.

5. Два случайных процесса $F_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ и $F_2 = \{f_1+k, f_2+k, \dots, f_n+k\}$ смещенные относительно друг друга на постоянную величину k , имеют один и тот же вид нормированной автокорреляционной функции $R_n(m)$.

Анализируя выражения 4.1 и 4.5 можно сделать вывод о том, что нормированные значения автокорреляционной функции $R_n(m)$ есть не что иное, как коэффициент корреляции, рассчитанный для точек удаленных друг от друга на m пикетов. Таким образом, значения корреляционной функции, для конкретного аргумента m показывает насколько значения поля, удаленные друг от друга на m пикетов, коррелированы⁵ между собой. Так, если $R(5) = 0.85$, то это свидетельствует о том, что значения поля, удаленные друг от друга на 5 пикетов, в целом, достаточно коррелированы, если $R(9) = 0.05$, то значения поля удаленные на 9 пикетов практически независимы (некоррелированы). Наконец, если, например, $R(13) = -0.9$, то между значениями поля, отстоящими друг от друга на 13 пикетов, существует сильная обратная корреляционная связь. Случайный процесс, для которого даже при единичном смещении $R(1) \leq 0$, получил название **абсолютно некоррелируемого процесса** (“белый шум”).

На рисунке 4.1 приведены примеры расчета нормированных автокорреляционных функций для различных случайных процессов, близких по форме к константе (1), синусоиде (2), абсолютно некоррелируемому процессу (3), квадратичной (4) и линейной (5) функциям. Из второго рисунка следует, что автокорреляционная функция периодического процесса является также периодической. При этом период автокорреляционной функции совпадает с периодом процесса. Для абсолютно некоррелируемого сигнала значения автокорреляционной функции близки к нулю при любых значениях аргумента, отличных от нуля.

⁵ Слово **correlation** переводится с английского языка как схожесть в изменениях, таким образом, под корреляцией понимается степень схожести в изменениях двух процессов.



Нормированные значения автокорреляционной функции постоянного процесса тождественно равны единице, так как при любых смещениях m значения случайного процесса полностью совпадают, то есть абсолютно коррелируемы.

По АКФ определяется такой важный атрибут, как интервал корреляции. Под *интервалом* или *радиусом корреляции* понимают такое расстояние между значениями поля r , начиная с которого значения поля f_i и f_{i+r} можно считать некоррелированными, а при нормальном законе распределения – независимыми между собой. Для оценки интервала корреляции используются разные эвристические приемы. Наиболее распространенным приемом является оценка величины r по заданному значению ε , где $\varepsilon = (0,1 \div 0,3)R(0)$. При этом r принимается равным аргументу АКФ, m , начиная с которого выполняется соотношение $|R_n(m)| \leq \varepsilon$.

Для оценки интервала корреляции используются также соотношения:

$$r = \sum_{m=0}^M |R_n(m)| \quad \text{или} \quad r = \sum_{m=0}^M R_n^2(m).$$

На практике, радиус корреляции оценивают по минимальному значению аргумента m , при котором автокорреляционная функция первый раз пересекает ось абсцисс.

Форма АКФ и интервал корреляции используются при решении различных задач обработки геофизических данных, из них выделим следующие:

1) Оценка корреляционных свойств сигналов и помех. При отсутствии корреляции между сигналом s_i помехой n_i , что обычно постулируется, т.е. появление сигнала не зависит от помехи, АКФ представляется суммой АКФ сигнала и АКФ помехи, поскольку $f_i = s_i + n_i$:

$$R(m) = \frac{1}{n-|m|} \sum s_i s_{i+m} + \frac{1}{n-|m|} \sum n_i n_{i+m}$$

Из этого выражения следует, что при малой интенсивности помехи по сравнению с интенсивностью сигнала АКФ представляет оценку корреляционных свойств сигнала, и, наоборот, на интервале, где отсутствует сигнал, АКФ оценивает свойства помехи;

2) АКФ сигнала и помех является основой расчета всех оптимальных фильтров, рассматриваемых в главе VII;

3) При совпадении формы сигнала и формы АКФ помехи никакая дополнительная обработка по их разделению не внесет ничего нового, поскольку при этом частотные диапазоны сигнала и помехи полностью перекрываются между собой;

4) Разделение на однородные в статистическом отношении участки с целью геологического картирования. С этой целью используются обычно одновременно

среднее значение, дисперсия и интервал корреляции, рассчитываемые в скользящих окнах;

5) Оценка разрешающей способности сейсмической записи по величине отношения $H = \sum_{m=0}^T R_n^2(m) / \sum_{m=0}^{5T} R_n^2(m)$, где T - период записи. При H , близком к единице, разрешающая способность велика, при $H \leq 0,5$ - низкая;

6) Использование интервала корреляции для оценки глубины залегания h объектов по потенциальным полям $h \leq \frac{r}{\pi}$.

На этом простом соотношении между глубиной h и интервалом корреляции r , точно выполняемом для объектов в виде цилиндров бесконечного простираения, основаны приемы гравитационного, предложенного А.М.Петрищевским, и корреляционного, предложенного А.В.Петровым, зондирования потенциальных полей;

7) Оценка длительности реализации, например, длины профиля, для которой рассчитывается АКФ. В общем случае дисперсия АКФ определяется выражением $\sigma_R^2 = \frac{2}{n} \sum_{m=0}^M R_n^2(m)$, из которого следует возможность оценивания длительности самой реализации n .

4.2. Взаимно корреляционная функция и ее применение.

Взаимно корреляционная функция (ВКФ) представляет собой оценку корреляционных свойств между двумя случайными процессами f_{1i} и f_{2i} , представленными наблюдениями поля на двух профилях, на двух трассах и т.д.

Рассчитывается ВКФ по формуле:

$$B(m) = \frac{1}{n - |m|} \sum_{i=1}^{n-|m|} (f_{1i} - \bar{f}_1)(f_{2i+m} - \bar{f}_2) \quad (4.7)$$

где n - число точек в каждой реализации, т.е. по каждому профилю, трассе и т.д.

$\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ - средние значения наблюдаемых данных по этим профилям, трассам.

$m = 0; \pm\Delta; \pm2\Delta; \dots \pm M\Delta$.

При равенстве средних значений нулю: $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = 0$ формула (4.7) упрощается

$$B(m) = \frac{1}{n - |m|} \sum_{i=1}^{n-|m|} f_{1i} f_{2i+m} \quad (4.8)$$

При $m=0$ значение ВКФ равно произведению значений поля для одноименных дискретов наблюдений по профилям, трассам и т.д.

При $m = \pm\Delta$ значение ВКФ равно произведению значений поля, смещенных на один дискрет. При этом будем полагать, что смещение на один дискрет влево последующего профиля, т.е. f_{2i} , относительно предыдущего, т.е. f_{1i} , соответствует положительному смещению, т.е. $m = +\Delta$, а смещение вправо соответствует величине $m = -\Delta$.

Поскольку при $m = +\Delta$ и при $m = -\Delta$ перемножаются разные значения поля, в отличие от расчета АКФ, то ВКФ не является четной функцией, т.е. $B(m) \neq B(-m)$.

При $m = \pm 2\Delta$ значение ВКФ равно произведению значений поля, смещенных уже на два дискрета и т.д.

На практике часто используется нормированная ВКФ, определяемая как

$$B_n(m) = \frac{B(m)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (4.8)$$

где σ_1 и σ_2 - среднеквадратические отклонения значений поля для первого и второго профиля трассы.

ВКФ нашла применение при решении трех основных задач обработки геофизических данных:

1) Оценка корреляционных свойств сигнала при условии некоррелированности помехи между профилями, трассами и незначительном изменении формы сигнала от профиля к профилю (от трассы к трассе), что обычно выполняется на практике, поскольку расстояние между профилями выбирается таким образом, чтобы сигналы коррелировались между профилями, а помехи, наоборот, были бы некоррелированы. В сейсморазведке расстояния между сейсмоприемниками выбираются таким образом, чтобы нерегулярные волны-помехи были бы некоррелированы между соседними трассами. При этом ВКФ будет равна

$$B(m) = \frac{1}{n-|m|} \sum f_{1i} f_{2i+m} = \frac{1}{n-|m|} \sum s_{1i} s_{2i+m} \quad (4.9)$$

т.е. при совпадении формы сигналов последняя сумма будет равна АКФ сигнала.

Следовательно, ВКФ более надежно оценивает корреляционные свойства сигнала по сравнению с АКФ.

2) Оценка простираения сигналов по положительным экстремумам ВКФ. Положительные экстремумы ВКФ указывают на наличие корреляции сигнала между профилями, трассами, поскольку значение аргумента m_j , при котором достигается экстремум ВКФ, соответствует смещению сигнала на последующем профиле относительно его положения на предыдущем. Таким образом, по величине

положительных экстремумов ВКФ $B(m_j)$ определяется смещение m_j сигнала от профиля к профилю, что и приводит к оценке простирания сигнала.

В случае сигналов (аномалий) различного простирания ВКФ имеет два или более положительных экстремумов.

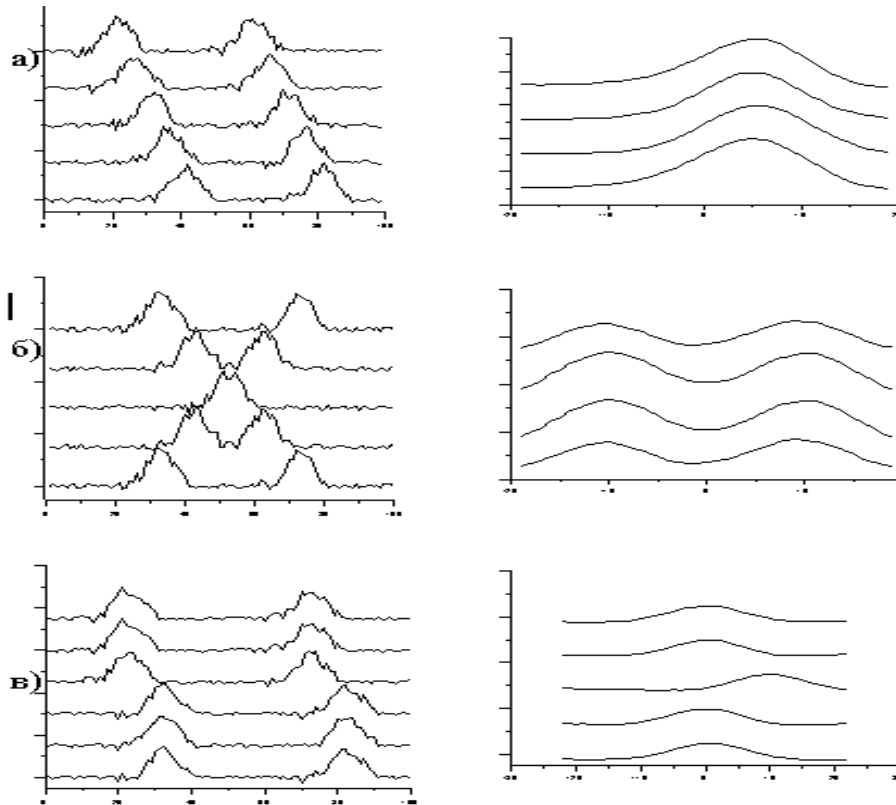


Рис.4.2. Оценка простирания аномалий по экстремальным значениям ВКФ(m) в случае аномалий одного простирания (а), различного простирания (б), смещения аномалий (в).

На рис.4.2,а приведены результаты наблюдений физического поля по пяти профилям и соответствующие этим наблюдениям графики ВКФ, по которым определяется простирание сигналов, соответствующее их смещению на два дискрета от профиля к профилю.

В случае интерференции двух сигналов, как это изображено на рис.4.2,б, фиксируются два положительных экстремума при $m_j = 2\Delta$ и $m_j = -2\Delta$, что в дальнейшем при суммировании данных по нескольким профилям в направлении простирания сигналов позволяет четко провести их разделение по площади съемки.

Наконец, резкое смещение экстремумов ВКФ для какой-либо пары профилей по сравнению с экстремумами соседних пар профилей позволяет использовать ВКФ для выделения нарушений в распределении поля, как это показано на рис.4.2,в. По такому смещению экстремумов ВКФ обычно картируются разломы с простиранием, близким к простиранию профилей геофизической съемки.

При обработке сейсмических записей построение ВКФ между данными соседних трасс обеспечивает оценку суммарной статической и кинематической поправок, определяемую абсциссой положительного экстремума ВКФ. При знании кинематики, т.е. скоростной характеристики временного разреза, нетрудно определить величину статической поправки.

3) Оценка величины энергетического отношения сигнал/помеха $\bar{s}^2 / \sigma^2$, где $\bar{s}^2$ - дисперсия сигнала, σ^2 - дисперсия помехи, по значению положительного экстремума ВКФ. При этом величина энергетического отношения сигнал/помеха оценивается без привлечения априорных сведений о сигнале и помехе по формуле А.К.Яновского:

$$\frac{\bar{s}^2}{\sigma^2} = \frac{B_n(m_s)}{1 - B_n(m_s)} \quad (4.10)$$

где $B_n(m_s)$ - значение положительного экстремума нормированной ВКФ.

Выражение (4.10) справедливо при двух предположениях: помеха некоррелирована между профилями, а сигнал коррелируется и сохраняет свою форму от профиля к профилю.

Эти предположения приводят к тому, что формула (4.9) оценивает дисперсию сигнала, т.е. $B(m_s) = \frac{1}{n} \sum s_{li} s_{li+m} = \bar{s}^2$. В то же время АКФ при $m=0$ равняется сумме дисперсий сигнала и помехи, т.е. $R(0) = \bar{s}^2 + \sigma^2$, тогда отношение

$$\frac{B_n(m_s)}{R(0) - B_n(m_s)} = \frac{\bar{s}^2}{\bar{s}^2 + \sigma^2 - \bar{s}^2} = \frac{\bar{s}^2}{\sigma^2}.$$

4.3. Двумерные корреляционные функции.

Для описания корреляционных свойств геофизических полей, измеренных по площади съемки, используется двумерная автокорреляционная функция (ДАКФ), которая для центрированных значений поля, т.е. при равенстве средних значений каждого профиля нулю, определяется выражением

$$R(p, m) = \frac{1}{N - |p|} \frac{1}{n - |m|} \sum_{k=1}^{N-|p|} \sum_{i=1}^{n-|m|} f_{ki} f_{k+p, i+m} \quad (4.11)$$

где f_{ki} - центрированные по всей площади наблюдения значение поля (из значений поля вычитается среднее по всей площади значение) на k -ом профиле в i -той точке, индекс p - смещение между профилями съемки: $p = 0; \pm \Delta y; \pm 2\Delta y; \dots \pm P\Delta y$; индекс m -

смещение вдоль профиля $n = 0; \pm\Delta x; \pm 2\Delta x; \dots; \pm M\Delta x$; N – общее число профилей; n – число точек по профилю.

Для изучения структуры ДАКФ распишем выражение (4.11) для различных фиксированных значений p .

$$\text{При } p=0 \text{ получаем } R(0, m) = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{n-|m|} \sum f_{1i} f_{1i+m} + \dots \frac{1}{n-|m|} \sum f_{Ni} f_{Ni+m} \right)$$

Т.е. при $p=0$ ДАКФ представляет сумму всех одномерных АКФ, вычисленных для значений каждого профиля и осредненный по общему числу профилей N .

$$\text{При } p=1 \text{ имеем: } R(1, m) = \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{n-|m|} \sum f_{1i} f_{2i+m} + \dots \frac{1}{n-|m|} \sum f_{N-1,i} f_{N,i+m} \right)$$

Т.е. при $p=1$ ДАКФ равна осредненной сумме ВКФ, вычисленных для значений поля данных соседних пар профилей.

При $p=2$ ДАКФ равна осредненной ВКФ, вычисленных для значений поля данных, расположенных через профиль и т.д.

Построение ДАКФ в изолиниях ее рельефа на плоскости $m\Delta x$ и $p\Delta y$ позволяет наглядно отображать корреляционные свойства геофизических наблюдений по площади.

На рис.4.3 приведены результаты наблюдаемого гравитационного поля и соответствующая ему ДАКФ. Применение ДАКФ аналогично применению одномерной АКФ, но в дополнение к перечисленным в разделе 4.1 задачам обработки, по ДАКФ возможна оценка простираения сигналов различного простираения

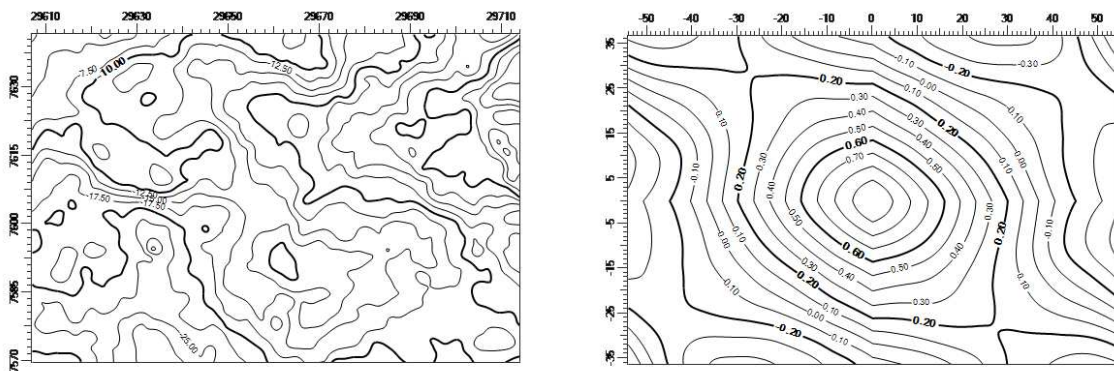


Рис.4.3. Гравитационное поле dG (слева) и его двумерная автокорреляционная функция (справа).

Центральная симметрия ДАКФ проявляется в равенствах $R(p, m) = R(\pm p, m)$ и $R(p, m) = R(p, \pm m)$, т.е. расчеты ДАКФ достаточно осуществить лишь для положительных значений p или для положительных значений m .

Двумерная взаимно корреляционная функция (ДВКФ) рассчитывается как для положительных, так и для отрицательных значений m и p по формуле

$$B(p, m) = \frac{1}{N - |p|} \frac{1}{n - |m|} \sum_{k=1}^{N-|p|} \sum_{i=1}^{n-|m|} f_{ki}^I f_{k+p, i+m}^{II} \quad (4.12)$$

где f_{ki}^I и f_{ki}^{II} - центрированные по всей площади наблюдения значения двух разных полей, либо значения полей, полученных на различных глубинах залегания или на разных высотах.

ДВКФ характеризует взаимные корреляционные свойства, либо разных полей, либо полей, полученных на разных высотах и глубинах. На рисунке 4.4. приведена ДВКФ между магнитным и гравитационным полями.



Рис.4.4. Двумерная взаимно-корреляционная функция (в центре) между магнитным полем dT (слева) и гравитационным полем dG (справа).

Помимо авто- и взаимно корреляционных функций в практике обработки геофизических данных нашли применение такие корреляционные функции, как:

Структурная функция $C(m) = \frac{1}{n - |m|} \sum_{i=1}^{n-|m|} (f_i - f_{i+m})^2$, используемая при

обработке геохимических данных. Для структурной функции формируются и взаимно-структурные функции. **Ретрокорреляционная функция** $Ret(m) = \sum f_i f_{n-i}$, используется при выделении кратных волн в сейсморазведке.

ГЛАВА V. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.

Спектральный анализ занимает центральное место при обработке геофизических данных. Спектральный анализ используется для описания спектрального (частотного) состава геофизических сигналов, заданных как детерминированными, так и случайными функциями.

В настоящее время спектральный анализ объединяет методы анализа Фурье и статистический анализ временных последовательностей наблюдений. Под анализом

Фурье понимается разложение сигнала по периодическим функциям синусов и косинусов. **Спектр** – это функция, описывающая распределение амплитуд и фаз по различным частотным составляющим (гармоникам) сигнала, начиная с низкочастотных и кончая высокочастотными составляющими. Суммирование частотных составляющих с учетом их амплитуд и фаз приводит к восстановлению формы сигнала.

Практическое применение анализа Фурье при обработке геофизических данных связано с их представлением в виде сигналов, заданных в дискретных точках наблюдений, т.е. $S(x = r\Delta) = S_r$ или $S(t = r\Delta t) = S_r$, поскольку обработка данных проводится на ЭВМ, где все данные – дискретны.

Анализ Фурье предназначен для обработки периодических сигналов, для которых выполняется соотношение $S(t) = S(t + T)$, где T называется **периодом сигнала**. Для непериодических сигналов, например, $S(t) = e^{-|t|}$ такого периода не существует, и при анализе Фурье подобных сигналов период задается искусственно, ограничивая непериодический сигнал величиной T при малых его значениях. В теоретических приложениях рассматриваются аperiodические сигналы, для которых период стремится к бесконечности т.е. $T \rightarrow \infty$.

При спектральном анализе Фурье основными типами сигналов являются: дискретные и непрерывные, периодические и непериодические, детерминированные (аналитически заданные) и случайные.

5.1. Спектры дискретно заданного сигнала.

Построение спектров дискретно заданного сигнала основано на теореме о том, что любую непрерывную периодическую функцию, удовлетворяющую условиям Дирихле (функция ограничена и имеет конечное число разрывов, т.е. любые геофизические данные удовлетворяют этим условиям) можно представить в виде конечного ряда Фурье:

$$S(t) = A_0 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (A_m \cos 2\pi m f_1 t + B_m \sin 2\pi m f_1 t) + A_n \cos 2\pi n f_1 t \quad (5.1)$$

содержащего n -констант A_m и B_m , называемых коэффициентами Фурье и определяемых таким образом, чтобы значения непрерывного $S(t)$ и дискретного S_r сигналов совпадали бы в точках $t = r\Delta$, т.е. $S(r\Delta) = S_r$.

Заменяя t на $r\Delta$ в (5.1) получаем

$$S_r = A_0 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (A_m \cos 2\pi m f_1 r\Delta) + B_m \sin 2\pi m f_1 r\Delta + A_n \cos 2\pi n f_1 r\Delta \quad (5.2)$$

В выражении (5.2) абсцисса сигнала r принимает значения $r=-n, -n+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1$.

Таким образом, общее число дискретных значений сигнала $N=2n$. Начало отсчета по абсциссе расположено в центре сигнала, при этом число положительных, включая $r=0$, значений абсцисс равно числу отрицательных значений абсцисс. Такая нумерация абсцисс сигнала облегчает расчеты его спектров, хотя выбор начала отсчета не является принципиальным и его можно располагать либо в начале сигнала, либо в его конце.

Значение $N\Delta$ (Δ - шаг дискретности) определяет период сигнала, а величина $f_1 = \frac{1}{N\Delta}$ - **основную частоту сигнала**.

При $f_1 = \frac{1}{N\Delta}$ синусы и косинусы образуют ортогональную систему. Если левую и правую части выражения (5.2) умножить сначала на $\cos \frac{2\pi mr}{N}$, а затем на $\sin \frac{2\pi mr}{N}$ и провести суммирование по r , то с учетом ортогональности синусов и косинусов получим явные выражения для коэффициентов Фурье

$$A_m = \frac{1}{N} \sum_{r=-n}^{n-1} S_r \cos(2\pi mr / N); \quad B_m = \frac{1}{N} \sum_{r=-n}^{n-1} S_r \sin(2\pi mr / N) \quad (5.3)$$

где $m=1, 2, \dots$, номера гармоник.

При $m=0$, $B_0=0$, а A_0 равно среднему значению сигнала; $f_1 = \frac{1}{N\Delta}$ - основная частота, $f_m = mf_1$ - называются гармониками основной частоты.

Номер последней гармоники определяется на основе **теоремы Котельникова**, согласно которой непрерывный периодический сигнал однозначно описывается дискретным рядом значений, если в последнем отсутствуют частоты выше $f_{cp} = \frac{1}{2\Delta}$.

Тогда отношение граничной частоты к основной позволяет найти номер последней гармоники, т.е. $f_{cp} / f_1 = \frac{N\Delta}{2\Delta} = n$.

Граничная частота называется **частотой Найквиста**. По коэффициентам Фурье (5.3) рассчитываются спектры дискретно заданного сигнала:

$$\text{-амплитудный спектр } R_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \quad (5.4)$$

$$\text{-фазовый спектр } \varphi_m = \arctg \left(-\frac{B_m}{A_m} \right) \quad (5.5)$$

Амплитудный спектр описывает распределение амплитуд по различным гармоникам, спектр – дискретный или линейчатый. Фазовый спектр характеризует распределение фаз по разным гармоникам.

Фаза представляет отклонение начальной точки гармоники от центра отсчета ($r = 0$) и в отличие от положительных величин амплитудного спектра, принимает как положительные, так и отрицательные значения. Оба спектра рассчитываются обычно для значений $m = 0, 1, \dots, N/2$, где N – число значений сигнала. Ввиду периодичности сигнала, заложенной основами анализа Фурье, эти спектры также являются периодическими.

По амплитудному и фазовому спектрам можно получить выражение для комплексного спектра:

-комплексный спектр S_m представляет комплексное число и может быть записан в разных вариантах:

$$S_m = R_m e^{-j\varphi_m} = A_m - jB_m = \frac{1}{N} \sum_{r=-n}^{n-1} S_r e^{-j\frac{2\pi mr}{N}} \quad (5.6)$$

$$j = \sqrt{-1}.$$

Известно, что для комплексного числа имеется комплексно-сопряженное, определяющее

-комплексно-сопряженный спектр S_m^* :

$$S_m^* = R_m e^{j\varphi_m} = A_m + jB_m = \frac{1}{N} \sum S_r e^{j\frac{2\pi mr}{N}} \quad (5.7)$$

Комплексно-сопряженный спектр представляет зеркальное отображение комплексного спектра в область отрицательных гармоник.

Кроме перечисленных видов спектров часто используется энергетический спектр;

-энергетический спектр есть произведение комплексного спектра на комплексно-сопряженный или квадрат амплитудного спектра, т.е. $S_m \cdot S_m^* = R_m^2$.

По энергетическому спектру рассчитывается дисперсия сигнала $\bar{S}^2$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{N} \sum_{r=-n}^{n-1} S_r^2 = R_0^2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} R_m^2 + R_n^2 \quad (5.8)$$

Вычисление спектров представляет **прямое преобразование Фурье**.

Вычисление значений сигнала по его спектрам представляет **обратное преобразование Фурье**, которое для дискретно заданного сигнала может быть

выражено, как
$$S_r = \sum_{m=-n}^n S_m e^{j \frac{2\pi m r}{N}}.$$

На практике используется тригонометрическая форма обратного преобразования Фурье дискретно заданного сигнала

$$S_r = R_0 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} R_m \cos\left(\frac{2\pi m r}{N} + \varphi_m\right) + R_n \cos \frac{2\pi n r}{N} \quad (5.9)$$

где R_m и φ_m - значения амплитудного и фазового спектров.

Рассмотрим пример вычисления амплитудного спектра сигнала, заданного следующими его значениями $S_r = -2, 0, 1, 1$. $r = -2 \quad r = -1 \quad r = 0 \quad r = 1$.

Среднее значение сигнала равно нулю, т.е. $R_0 = 0$. Поскольку $N=4$, то достаточно рассчитать две гармоники.

Коэффициенты A_m и B_m равны соответственно:

$$A_1 = \frac{1}{4} \left[(-2) \cos \frac{2\pi \cdot 1 \cdot (-2)}{4} + 0 + \cos \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 0}{4} + \cos \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{4} \right] = +3/4;$$

$$B_1 = \frac{1}{4} \left[(-2) \sin \frac{2\pi \cdot (-2)}{4} + 0 + \sin \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 0}{4} + \sin \frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{4} \right] = 1/4;$$

$$A_2 = \frac{1}{4} \left[(-2) \cos \frac{2\pi \cdot 2 \cdot (-2)}{4} + 0 + \cos \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 0}{4} + \cos \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 1}{4} \right] = 1/2;$$

$$B_2 = \frac{1}{4} \left[(-2) \sin \frac{2\pi \cdot 2 \cdot (-2)}{4} + 0 + \sin \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 0}{4} + \sin \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 1}{4} \right] = 0.$$

Отсюда $R_1 = \sqrt{10}/2$; $R_2 = 1/2$.

Рассмотрим пример вычисления значения сигнала в точке $r = 1$ при заданных его амплитудном и фазовом спектрах в таблице.

m	R_m	φ_m
0	1	0
1	2	-30°
2	1	0

С этой целью используем выражение (5.9), где $N = 2n = 4$.

$$S_{r=1} = 1 + 2 \cdot 2 \cos\left(\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + \cos \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 1}{4} = 1 + 2 - 1 = 2.$$

5.2. Спектры непрерывных сигналов.

Вначале рассмотрим спектры *непрерывного периодического сигнала* с периодом T . Для нахождения коэффициентов Фурье A_m и B_m для такого сигнала следует задать предельные соотношения $r\Delta \rightarrow t$, т.е. $S_r\Delta \rightarrow S(t)$; $\Delta \rightarrow 0$; $N\Delta \rightarrow T$.

При этом выражения (5.3) принимают вид:

$$A_m = \frac{1}{N\Delta} \sum S_r\Delta \cos \frac{2\pi mr\Delta}{N\Delta}; \quad B_m = \frac{1}{N\Delta} \sum S_r\Delta \sin \frac{2\pi mr\Delta}{N\Delta},$$

или

$$A_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos \frac{2\pi mt}{T} dt; \quad B_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin \frac{2\pi mt}{T} dt \quad (5.10)$$

Формулы для амплитудного (5.4) и фазового (5.5) спектров непрерывного периодического сигнала остаются прежними, их характер также линейчатый, однако ввиду того, что $f_{cp} = \frac{1}{2\Delta}$ стремится к бесконечности, то число гармоник бесконечно.

Комплексный спектр:

$$S_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{j\frac{2\pi mt}{T}} dt \quad (5.11).$$

Соответственно, обратное преобразование Фурье: $S(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_m e^{j\frac{2\pi mt}{T}}$.

Средняя мощность сигнала, или его дисперсия, будет

$$\bar{S}^2(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t) dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |S_m|^2.$$

В качестве **примера** рассмотрим расчет спектра непрерывного сигнала прямоугольной формы с единичной амплитудой длительностью τ и с периодом $T = 4\tau$. Этот сигнал соответствует операции осреднения поля в окне размером τ .

Коэффициенты Фурье такого сигнала равны

$$A_m = \frac{1}{4\tau} \int_0^{\tau} \cos \frac{2\pi mt}{4\tau} dt = \frac{4\tau}{2\pi m 4\tau} \sin \frac{2\pi m\tau}{4\tau} = \frac{1}{2\pi m} \sin \frac{\pi m}{2};$$

$$B_m = \frac{1}{4\tau} \int_0^{\tau} \sin \frac{2\pi mt}{4\tau} dt = \frac{1}{2\pi m} \left[1 - \cos \frac{\pi m}{2} \right].$$

Соответственно, амплитудный спектр будет

$$B_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} = \frac{1}{2\pi m} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi m}{2} + 1 - 2 \cos \frac{\pi m}{2} + \cos^2 \frac{\pi m}{2}} = \frac{1}{2\pi m} \sqrt{2(1 - \cos \frac{\pi m}{2})} = \frac{\sin \frac{\pi m}{4}}{\pi m}$$

Фазовый спектр

$$\varphi_m = \arctg \left(-\frac{1 - \cos \frac{\pi m}{2}}{\sin \frac{\pi m}{2}} \right) = \arctg \left(-\frac{2 \sin^2 \frac{\pi m}{4}}{2 \sin \frac{\pi m}{4} \cos \frac{\pi m}{4}} \right) = \arctgtg \left(-\frac{\pi m}{4} \right) = -\frac{\pi m}{4}.$$

Перейдем к рассмотрению спектров *непрерывного апериодического сигнала*, т.е. когда $T \rightarrow \infty$.

При этом коэффициенты Фурье (5.10) с учетом того, что $\frac{m}{T} \rightarrow f$; $A_m T \rightarrow A(f)$,

$B_m T \rightarrow B(f)$ принимают вид:

$$A(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \cos 2\pi f t dt; \quad B(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \sin 2\pi f t dt \quad (5.12)$$

Комплексный спектр

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (5.13)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df \quad (5.14)$$

Если ввести круговую частоту $\omega = 2\pi f$ и выражение (5.14) умножить и разделить на 2π , то получим из (5.13) и (5.14) пару преобразований Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5.15)$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

5.3. Спектры стационарного случайного процесса.

Стационарный случайный процесс полностью описывается его автокорреляционной функцией, поэтому спектр случайного процесса определяется спектром АКФ. Спектр АКФ показывает, какого рода колебания (гармоники) преобладают в случайном процессе и какова его внутренняя структура. Отличие от спектров детерминированных сигналов состоит в том, что для случайного процесса амплитуды гармоник являются случайными величинами, а сам спектр случайного процесса описывает распределение дисперсий по различным гармоникам (частотам). К вычислению спектра случайного процесса можно подходить в зависимости от того,

каким образом задана АКФ: в виде дискретно заданного сигнала, непрерывного периодического или непрерывного аperiodического сигналов.

Поскольку АКФ – четная функция, то при анализе Фурье учитываются лишь четные (косинусные) гармоники. В зависимости от способа задания АКФ получаем спектры для АКФ в виде дискретно заданного сигнала R_τ :

$$S_m = R_m = A_m = \frac{1}{N} \sum_{\tau=-n}^n R_\tau \cos \frac{2\pi m \tau}{N}$$

для АКФ в виде непрерывного периодического сигнала $R(\tau)$:

$$S_m = R_m = A_m = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} R(\tau) \cos \frac{2\pi m \tau}{T} d\tau$$

Для АКФ в виде непрерывного аperiodического сигнала $R(\tau)$:

$$S(\omega) = R(\omega) = A(\omega) = 2 \int_0^\infty R(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (5.16).$$

Поскольку нечетные гармоники для спектра АКФ отсутствуют, то приведенные выражения совпадают с энергетическими спектрами. Очевидно, что обратное преобразование Фурье для АКФ симметрично прямому. Так, для (5.16) получаем:

$$R(\tau) = \frac{2}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (5.17).$$

Выражение (5.16) используется для расчета спектров наиболее распространенных АКФ в аналитическом виде:

$$1) \text{ АКФ «белого» шума, заданной в виде дельта-функции, т.е. } R(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau=0 \\ 0 & \text{при } \tau>0 \end{cases}$$

Спектр АКФ $S(\omega) = \text{const}$

$$2) \text{ АКФ «треугольного» типа } R(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{m}{r_0}; m \leq r_0 \\ 0; m \geq r_0 \end{cases}; \quad S(\omega) = 2(1 - \cos \omega r_0) / \pi r_0 \omega^2.$$

$$3) \text{ АКФ «марковского» типа } R(\tau) = e^{-\alpha|m|}; \quad S(\omega) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)};$$

$$4) \text{ АКФ «гауссовского» типа } R(\tau) = e^{-m^2/r^2}; \quad S(\omega) = r\sqrt{\pi}e^{-\omega^2 r^2/4};$$

$$5) \text{ АКФ затухающей по экспоненте косинусоиды } R(\tau) = \exp(-\alpha|m|) \cos \beta m.$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega + \beta)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \beta)^2} \right).$$

АКФ гауссовского типа представляет модель гравитационных аномалий, АКФ затухающей по экспоненте косинусоиды – модель сейсмического импульса (α - определяет затухание; β - видимый период).

5.4. Свойства преобразований Фурье.

При спектральном анализе геофизических данных широко используются основные свойства преобразований Фурье, которые сводятся к следующему:

1) Свойство линейности, состоящее в том, что сумма сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ со спектрами $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ в спектральной области соответствует сумме их спектров: т.е. $S_1(t) + S_2(t) \Rightarrow S_1(\omega) + S_2(\omega)$, а при умножении сигнала на число a , его спектр также умножается на это число, т.е. $aS(t) \Rightarrow aS(\omega)$.

2) Свойство симметрии прямого и обратного преобразования Фурье для четных сигналов $S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} S(t) \cos \omega t dt \leftrightarrow S(t) = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega t d\omega$.

3) Свойство подобия, заключающееся в том, что сжатие (растяжение) сигнала приводит соответственно к растяжению (сжатию) спектра, т.е. если $S(t) \leftrightarrow S(\omega)$ и a – константа, то $S(at) \Rightarrow \frac{1}{a} S\left(\frac{\omega}{a}\right)$. Отсюда следует, что чем короче сигнал, тем спектр шире.

4) Свойство запаздывания сигнала на время τ , приводящее к изменению фазового сдвига каждой гармоники на $\omega\tau$ без изменения амплитудного спектра, т.е., если $S(t) \leftrightarrow S(\omega)$, то $S(t \pm \tau) \Rightarrow \exp(\mp j\omega\tau) S(\omega)$.

5) Свойство смещения спектра на величину ω_0 , приводящее к умножению сигнала на комплексное число, т.е. $S(\omega \pm \omega_0) \Rightarrow e^{\mp j\omega_0 t} S(t)$

6) Свойство дифференцирования сигналов, состоящее в том, что если $S(t) \rightarrow S(\omega)$, то $ds(t)/dt \Rightarrow +j\omega S(\omega)$, т.е. дифференцирование сигнала приводит к обогащению спектра высокочастотными составляющими и уничтожает составляющие с нулевой частотой. Это свойство распространяется на производную любого порядка, т.е.

$$\frac{d^n S(t)}{dt^n} \Rightarrow (+j\omega)^n S(\omega).$$

7) Свойство интегрирования сигнала $\int \dots \int S(t) dt_1 \dots dt_n \Rightarrow S(\omega) / (j\omega)^n$.

8) Свойство свертки двух сигналов. Сверткой двух сигналов $S_1(t)$ и $S_2(t)$ называется выражение $\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau)S_2(t-\tau)d\tau \Rightarrow S_1(t) * S_2(t)$.

В частотной области свертка сигналов равна произведению спектров этих сигналов: $\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau)S_2(t-\tau)d\tau \Rightarrow S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$.

В частном случае свертки сигнала с сигналом обратного времени, т.е. когда $S_2(t) = S_1(-t)$ имеем $S_2(t) * S_1(-t) \Rightarrow S(\omega)S^*(\omega) = |S(\omega)|^2$.

9) Свойство свертки двух спектров, состоящее в том, что свертка двух спектров равна произведению сигналов, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)S_2(\omega-\nu)d\nu \Rightarrow S_1(t) \cdot S_2(t)$.

5.5. Применение спектрального анализа при обработке геофизических данных.

Использование спектрального анализа в геофизике чрезвычайно широко и разнообразно. Основные приложения сводятся к следующему.

1. Оценка спектрального состава полезных сигналов (аномалий) и помех. Так, например, по спектральному составу волн в сейсморазведке максимум спектров полезных отраженных сигналов при среднечастотной сейсмике, используемой при поисках нефтегазовых залежей, приходится на диапазон от 20 до 60 Гц. В то же время, низкочастотные поверхностные (они же низкоскоростные) волны характеризуются диапазоном от 5 до 10 Гц, а частотный состав микросейсм – от 0 до 450 Гц. Поэтому для выделения полезных сигналов требуется подавление как низкочастотных, так и высокочастотных составляющих общего спектра регистрируемых сигналов.

Аналогичная ситуация характерна для спектров аномалий потенциальных полей. Так, региональные аномалии являются низкочастотными, а спектр погрешностей аналогичен спектру микросейсм в сейсморазведке, т.е. для выделения локальных составляющих (аномалий) требуется также подавление как низкочастотных, так и высокочастотных составляющих.

2. Изучение спектров основных трансформаций, используемых в магнито-гравиразведке. На рис.5.1. приведены соответственно спектры операции осреднения поля в окне размером τ (1), со спектром $S_1(\omega) = S(m\omega\tau) / \omega\tau$; пересчета поля в верхнее полупространство на высоту H (2) со спектром $S_2(\omega) = e^{-\omega H}$; пересчета поля в нижнее

полупространство на глубину H (3) со спектром $S_3(\omega) = e^{+\omega H}$; вычисления первой производной (4) и второй производной (5) со спектром $S_5(\omega) = \omega^2$; вычисления второй производной (5) на высоте H , т.е. когда вначале производится пересчет поля на высоту H , а затем для пересчитанного поля вычисляется вторая производная (6), со спектром $S_6(\omega) = e^{-\omega H} \omega^2$. Если трансформации (1) и (2) подчеркивают низкочастотные составляющие, а трансформации (3) и (4) – высокочастотные составляющие, то трансформация (6) представляет полосовой фильтр.

3. Синтез сигналов по их спектрам. С этой целью используется построение спектров исходного поля, а затем с помощью обратного преобразования Фурье осуществляется вычисление значений сигнала в заданном из априорных соображений интервале частот.

4. Построение линейных, в частности, оптимальных фильтров и оценка погрешностей линейных фильтров, рассмотренных в разделах VI и VII.



5. Комплексный анализ различных полей. Ввиду безразмерности спектров, спектры, полученные для разных полей, можно суммировать, перемножать и даже делить друг на друга. Получаемый при таких преобразованиях спектр комплексного анализа полей путем обратного преобразования приводит к комплексному параметру во временной или пространственной области.

Замечание 1. При обработке геофизических наблюдений по площади и по временному сейсмическому разрезу требуется использование двумерного дискретного преобразования Фурье. Разложение дискретного заданного сигнала в двумерный ряд Фурье имеет вид:

$$S_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{n=1}^N \alpha_{mp} \cos \frac{2\pi m i \Delta x}{n \Delta x} \cos \frac{2\pi p k \Delta y}{N \Delta y} + \sum \sum \beta_{mp} \cos \frac{2\pi m i \Delta x}{n \Delta x} \sin \frac{2\pi p k \Delta y}{N \Delta y} + \sum \sum \gamma_{mp} \sin \frac{2\pi m i \Delta x}{n \Delta x} \cos \frac{2\pi p k \Delta y}{N \Delta y} + \sum \sum \delta_{mp} \sin \frac{2\pi m i \Delta x}{n \Delta x} \sin \frac{2\pi p k \Delta y}{N \Delta y}$$

где m и p – номера гармоник по оси x и по оси y .

Коэффициенты Фурье при этом вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\alpha_{mp} &= \frac{\eta}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N S_{ik} \cos \frac{2\pi mi\Delta x}{n\Delta x} \cos \frac{2\pi pk\Delta y}{N\Delta y}; \\ \beta_{mp} &= \frac{\eta}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N S_{ik} \cos \frac{2\pi mi\Delta x}{n\Delta x} \sin \frac{2\pi pk\Delta y}{N\Delta y}; \\ \gamma_{mp} &= \frac{\eta}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N S_{ik} S_{ik} \sin \frac{2\pi mi\Delta x}{n\Delta x} \cos \frac{2\pi pk\Delta y}{N\Delta y}; \\ \delta_{mp} &= \frac{\eta}{nN} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N S_{ik} S_{ik} \sin \frac{2\pi mi\Delta x}{n\Delta x} \sin \frac{2\pi pk\Delta y}{N\Delta y}\end{aligned}$$

где $\eta=1$, если $m=0$ и $p=0$; $\eta=2$, если $m=0$ или $p=0$; $\eta=4$, если $m>0$ и $p>0$.

Начало отсчета при вычислениях здесь помещено в начало координат системы X и Y , гармоники рассчитываются до значений $m = n/2$ и $p = N/2$. По коэффициентам Фурье находится амплитудный спектр $R_m = \sqrt{\alpha_{mp}^2 + \beta_m^2 + \gamma_{mp}^2 + \delta_{mp}^2}$, который изображается либо в виде изолиний, либо в виде графиков.

Замечание 2. При изучении геофизических полей на больших территориях (при длине профилей > 500 км) следует использовать разложение поля по сферическим функциям. Сферические функции являются комбинациями синусо-косинусных функций и функций Лежандра. При этом зависимость сферической функции от долготы определяется рядом Фурье, а от широты – функциями Лежандра

$$S(\lambda, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^m (A_n^{(m)} \cos m\lambda + B_n^{(m)} \sin m\lambda) P_n^{(m)}(\cos \varphi)$$

где λ – долгота, φ – дополнение широты до 90° , а $P_n^{(m)}(\cos \varphi)$ – полином Лежандра первого рода степени n и порядка m .

Замечание 3. Рассматривая процесс вычисления амплитудного и фазового спектров, нетрудно видеть, что синусы и косинусы встречаются с одними и теми же аргументами. Алгоритм, позволяющий объединить их и тем самым ускорить процесс вычисления спектра, получил название алгоритма быстрого преобразования Фурье – БПФ.

Число арифметических операций в алгоритме БПФ, который уже требует числа исходных значений сигнала, равным $n = 2^k$, где k – целое число, равно $2n \log_2 n$, а при обычном преобразовании Фурье требуется n^2 операций, т.е. выигрыш равен отношению $n^2 / 2n \log_2 n$. Так, при $n=4096$ и $k=12$ выигрыш вычислений по времени составляет 170 раз.

5.6. Вейвлет-анализ геофизических полей.

Вейвлет-анализ представляет разложение исходных данных по системе заданных по форме сигналов и реализуется путем линейной свертки входных значений поля с весовыми функциями, в качестве которых выступают заданные по форме сигналы. Система заданных по форме сигналов или вейвлетов («вейвлет» - всплеск или небольшая волна, этот термин возник из применения вейвлет-анализа в самом начале его развития при обработке данных сейсморазведки) представляет совокупность таких функций (сигналов), каждая из которых является сдвинутой (по времени) и масштабируемой, т.е. сжатой или растянутой копией одной и той же функции, так называемого порождающего вейвлета. Для того, чтобы функция (сигнал) $\psi(t)$ называлась вейвлетом должны выполняться два условия: среднее значение $\psi(t)$ равно нулю и $\psi(t)$ должна быстро убывать при $t \rightarrow \pm\infty$, т.е. говорят, что всплеск (вейвлет) компактен в пространстве и локализован по частоте.

Вейвлет-анализ является обозначением большого класса разложений, поскольку существующие виды порождающих вейвлетов достаточно сильно отличаются друг от друга своими определениями, свойствами и приложениями. В определенном смысле вейвлет-анализ подобен Фурье-анализу с его разложением исходных значений по системе синусов и косинусов. Однако вейвлет-анализ имеет два существенных отличия от Фурье-анализа. Во-первых, Фурье-анализ не различает сигналы из двух синусоид с разными частотами, один из которых является суммой синусоид, а второй представляет следующие друг за другом последовательно синусоиды. В обоих случаях спектры таких сигналов представлены двумя пиками на фиксированных частотах этих синусоид. Во-вторых, Фурье-анализ слабо приспособлен для обработки нестационарных сигналов, в том числе локализованных на некотором временном интервале, поскольку в спектре теряется информация о временных характеристиках сигнала, т.е. вейвлет-анализ реализует спектральный анализ одновременно и по частоте и по времени. Порождающие или базисные функции вейвлет-анализа в отличие от Фурье-анализа обладают частотно-временной локализацией. Базисной функцией в Фурье-анализе является $e^{j\omega x}$. Масштабирование базисной функции по времени осуществляется в вейвлет-анализе умножением (или делением) ее абсциссы на число, т.е. $\psi(t) = \psi(at)$, что приводит к сжатию или растяжению базисной функции, т.е. заданного по форме сигнала, то же самое касается масштабирования спектра по частоте.

В практике обработки геофизических данных получил применение непрерывный вейвлет-анализ. *Непрерывным вейвлет-анализом* (преобразованием)

исходной функции $f(t)$ называют функцию двух переменных $F(\omega, b)$. При этом вводится базис (порождающий вейвлет), отвечающий условиям равенства его среднего значения нулю и быстрого затухания по времени в виде

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (5.18),$$

где множитель $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ требуется для сохранения масштабов. Если a и b – произвольные вещественные значения, тогда пара преобразований непрерывного вейвлет-анализа принимает вид:

$$w_f(a, b) = \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (5.19)$$

$$f(t) = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} w_f(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db, \quad \text{где } C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega - \text{нормализующий}$$

множитель, $\langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle$ – скалярное произведение исходного сигнала $f(t)$ с материнским вейвлетом $\psi(t)$, представленное их линейной сверткой.

Сравнивая формулы (6.9) с парой преобразований Фурье (5.15), легко видеть, что в преобразованиях Фурье роль функции $\psi_{a,b}(t)$ играет функция $e^{j\omega t}$, а C_{ψ} аналогичен коэффициенту 2π , роль частоты играет масштабный множитель $\frac{1}{a}$. Но

базисная функция $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ зависит еще от параметра ее сдвига по времени b .

Следовательно, для каждой пары значений a и b функция $w_f(a, b)$ определяет амплитуду соответствующего вейвлета. В Фурье-анализе каждой частоте соответствует всего одна гармоническая составляющая, а для вейвлет-анализа каждой частоте соответствует множество сдвинутых друг относительно друга функций.

В геофизике широко используются порождающие вейвлеты на основе производных функции Гаусса: $\psi_m(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \exp(-t^2/2)$, как хорошо локализованной и по частоте и по времени.

На рис.5.2. приведены WAVE-вейвлет при $m=1$ (а), МНАТ-вейвлет при $m=2$ (б), DOG-вейвлет, как разность двух гауссиан (в), Morlet-вейвлет: $\psi(t) = \exp(j\omega_0 t) e^{-t^2/2}$ (г)

Слева от этих вейвлетов представлены их Фурье-образы. Морле-вейвлет наиболее распространен при обработке данных сейсморазведки. МНАТ-вейвлет – при обработке данных электромагнитных зондирований.

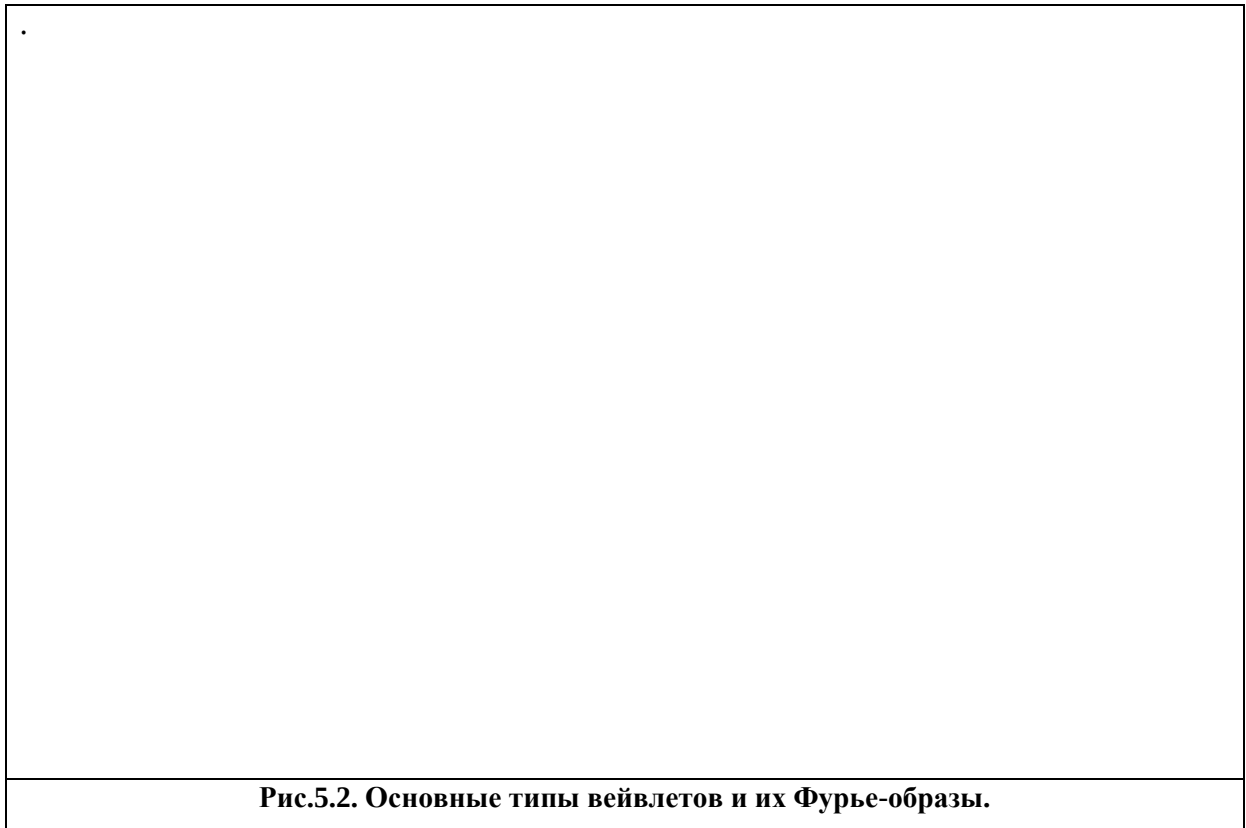


Рис.5.2. Основные типы вейвлетов и их Фурье-образы.

ГЛАВА VI. ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ.

Одной из основных задач обработки геофизических полей является выделение сигналов (аномалий) на фоне помех. С этой целью используется большое разнообразие приемов преобразования исходного поля, которые сводятся к линейной или нелинейной фильтрации.

Под фильтрацией понимается преобразование экспериментальных данных для разделения сигналов и помех. **Сигнал** – это форма проявления поля, в которую облечена полезная информация. **Помеха** – любое возмущение поля, препятствующее выделению полезной информации. Для потенциальных полей употребляется термин аномалия, в сейсморазведке – сигнал, в электромагнитных методах используются оба термина.

В настоящее время наиболее широкое распространение получили линейные фильтры, построение которых осуществляется обычно в рамках аддитивной модели поля, т.е. когда результаты наблюдений f_i представлены в виде суммы сигнала S_i и n_i $f_i = S_i + n_i$. Следует отметить, что понятия сигнала и помехи в разведочной геофизике носят не абсолютный, а относительный характер. Так, при выделении локальной аномалии в гравиразведке помехами являются региональная аномалия и погрешности

наблюдений, а при выделении региональной аномалии в качестве помех выступают уже локальные аномалии.

Сигнал (аномалия) может быть представлен либо детерминированной, т.е. аналитически заданной функцией, либо случайным процессом. Помеха чаще всего описывается случайным стационарным процессом с известными или неизвестными корреляционными (спектральными) свойствами. Помехи могут быть геологического (влияние фундамента, верхней части разреза, рельефа местности и т.д.) и негеологического (временные вариации полей, блуждающие токи, погрешности измерений и т.д.) происхождения.

6.1. Понятие о линейном фильтре. Оператор свертки.

Преобразование экспериментальных данных $f(t)$ в некоторую функцию $y(t_i)$ производится путем применения оператора фильтра L : $y(t_i) = L[f(t_i)]$, где $f(t)$ - вход фильтра, $y(t_i)$ - выход фильтра. Линейным оператором или **линейным фильтром** называется оператор, удовлетворяющий двум условиям:

$$\begin{aligned} L[af(f_i)] &= aL[f(f_i)] \\ L[f_1(f_i) + f_2(f_i)] &= L[f_1(f_i)] + L[f_2(f_i)] \end{aligned}$$

Воздействие линейного фильтра на входной сигнал $f(t)$ задается выражением $y(t) = \int_0^T h(\tau) f(t - \tau) d\tau$, где $h(\tau)$ - **весовая функция фильтра**, которое называется интегралом свертки. **Дискретным аналогом свертки** является ее представление в виде

$$y_j = \sum_{i=0}^M h_i f_{j-i} \quad (6.1),$$

где h_i - дискретные значения весовой функции фильтра (весовые коэффициенты) $i=0,1,\dots,M$. f_j - входные (исходные) значения, т.е. результаты фильтрации $j=0,1,\dots,n$. ($M \ll n$).

Основная задача линейной фильтрации состоит в определении весовой функции фильтра h_i . Заметим, что если в качестве весовых коэффициентов используются непосредственно сами исходные данные f_i , то выражение (6.1) приводит к реализации нелинейного фильтра. Так, если $h_i \equiv f_i$, то (6.1) представляет автокорреляционную функцию, и, таким образом, расчет АКФ является нелинейной процедурой.

Суть операции свертки (6.1) легко пояснить на следующем примере. Пусть входная функция, т.е. исходные данные заданы тремя дискретными значениями f_0, f_1 и f_2 , а весовая функция – двумя дискретными значениями h_0, h_1 . В соответствии с выражением свертки (6.1) получаем:

$$\begin{aligned} \text{при } j=0 & \quad y_0 = h_0 f_0 \\ \text{при } j=1 & \quad y_1 = h_0 f_1 + h_1 f_0 \\ \text{при } j=2 & \quad y_2 = h_0 f_2 + h_1 f_1 \\ \text{при } j=3 & \quad y_3 = h_0 f_2 \end{aligned}$$

Процесс вычисления выходных значений свертки можно представить в виде следующей схемы

$$\begin{array}{ccccccc} & & f_0 & f_1 & f_2 & & \\ \rightarrow & h_1 & h_0 & & & & \\ & & h_1 & h_0 & & & \\ & & & h & h_0 & & \\ & & & h_1 & h_0 & \rightarrow & \end{array}$$

Таким образом, **операция свертки** выполняется в четыре этапа: обращение во времени весовой функции, ее перемещение вдоль исходных (входных) значений поля, перемножение весовых коэффициентов с входными значениями и суммирование полученных произведений.

Общее число выходных значений y_i равно $n+M-1$. Крайние члены выходных значений (для рассмотренного примера y_0 и y_3) получаются при неполном перекрытии входного сигнала и весовой функции, т.е. их значения обычно искажены. Это – так называемые краевые эффекты. При обработке обычно их не учитывают, т.е. отбрасывают.

Проблема построения фильтра состоит в нахождении весовой функции, исходя из выбранной модели экстремальных данных, цели обработки и априорной информации о сигнале и помехах.

Используя свойство преобразований Фурье о свертке, можно перейти к **частотному аналогу уравнения свертки**, т.е.

$$Y(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (6.2)$$

где $F(\omega)$ и $Y(\omega)$ – спектры входного и выходного сигналов, а $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$ – есть

частотная характеристика линейного фильтра.

При дискретном задании весовой функции ее частотная характеристика определяется дискретным преобразованием Фурье. Обратное преобразование Фурье

позволяет найти весовую функцию фильтра $h(t)$, если задана его частотная

$$\text{характеристика } H(\omega): h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

При этом амплитудный спектр выходного сигнала $y(t)$ равен произведению амплитудных спектров $h(t)$ и $f(t)$, а фазовый спектр – сумме их фазовых спектров, т.е.

$$R^y(\omega) = R^h(\omega) R^f(\omega)$$

$$\varphi^y(\omega) = \varphi^h(\omega) + \varphi^f(\omega)$$

В общем случае частотная характеристика $H(\omega)$ является комплексным спектром, т.е. $H(\omega) = R^h(\omega) e^{-j\varphi^h(\omega)}$, где $R^h(\omega)$ есть **амплитудно-частотная характеристика фильтра**, называемая также коэффициентом передачи линейной системы, $\varphi^h(\omega)$ - **частотно-фазовая характеристика фильтра**.

Амплитудно-частотная характеристика определяет величину усиления для составляющих сигнала определенной частоты при ее прохождении через линейный фильтр. Частотно-фазовая характеристика определяет временную задержку для составляющих, создаваемую фильтром на заданной частоте.

Фильтры, построение которых проводится в частотной области, делятся на

1. Низкочастотные, амплитудно-частотная характеристика $H_H(\omega)$ которых имеет постоянное усиление в полосе частот $|\omega| < \omega_1$ и нулевое вне этой полосы.

2. Высокочастотные, амплитудно-частотная характеристика $H_B(\omega)$ которых постоянна в полосе $|\omega| > \omega_2$ и равна нулю вне этой полосы.

3. Полосовые, обеспечивающие равномерное усиление в полосе частот $|\omega_1| \leq |\omega| \leq \omega_2$ и нулевое усиление за пределами этой полосы.

Частоты ω_1 и ω_2 являются граничными частотами или частотами среза фильтра.

Основой построения (или синтеза) фильтров любого типа является низкочастотный фильтр, поскольку через его амплитудно-частотную характеристику выражаются другие типы фильтров. Так, для высокочастотного фильтра $H_B(\omega_2) = 1 - H_H(\omega_2)$, а для полосового фильтра $H_{\Pi}(\omega) = H_H(\omega_2) - H_H(\omega_1)$.

6.2. Двумерные линейные фильтры.

Многоканальность сейсмических записей, площадной характер наблюдений потенциальных полей, результаты частотных зондирований в электроразведке приводят к необходимости построения двумерных линейных фильтров. Такие фильтры

приводят к пространственно-временной фильтрации временных разрезов в сейсмо- и электроразведке или просто к пространственной фильтрации по площади наблюдений.

Двумерный аналог свертки (6.1), определяющий двумерную фильтрацию входных данных f_{pj} ($j=0,1,\dots,n$, n – число пикетов, $p=0,1,\dots, N$; N – число профилей) имеет вид:

$$y_{p,j} = \sum_k \sum_i h_{ki} f_{p-k,j-i} \quad (6.3),$$

где h_{ki} – матрица весовых коэффициентов, индекс $k=0,1,\dots,K$ изменяется по профилям: индекс i – по пикетам $i=0,\dots,M$. Обычно отсчет значений весовых коэффициентов производится от центральной точки весовой функции, при этом индекс k изменяется от $-K/2$ до $K/2$, а индекс i от $-M/2$ до $M/2$.

В частотной области двумерная фильтрация определяется произведением двумерных спектров весовой функции $H(\omega_x, \omega_y)$ и входных данных $F(\omega_x, \omega_y)$, т.е.

$$Y(\omega_x, \omega_y) = H(\omega_x, \omega_y) F(\omega_x, \omega_y) \quad (6.4)$$

где $\omega_x = 2\pi / M\Delta x$; $\omega_y = 2\pi / K\Delta y$ – пространственные частоты, $M\Delta x$ и $K\Delta y$ – протяженности сигналов вдоль профиля и по направлению простирания сигналов по площади, т.е. по профилям.

Формулы (6.3) и (6.4) выражают прямое и обратное преобразование Фурье для сигналов (аномалий), имеющих распространение по площади съемки.

Для сейсмических записей прямое и обратное преобразование Фурье, связывающее упругую волну $f(t, x)$ с ее спектром, определяются как

$$S(\omega, K_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, x) \exp[-j(\omega t + K_x x)] dt dx$$

$$f(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega, K_x) \exp[j(\omega t + K_x x)] d\omega dx.$$

В этих формулах $\omega = 2\pi / T$ определяет частоту по времени, а величина K_x – пространственную частоту. По аналогии с $\omega = 2\pi / T$, где T – период сигнала по времени, для сейсмических сигналов $K_x = 2\pi / \lambda_k$, где λ_k – кажущаяся длина волны, $\lambda_k = V_k T$, V_k – кажущаяся скорость и, следовательно, пространственная частота

$K_x = 2\pi / \lambda_k = \frac{2\pi}{TV_k} = \frac{\omega}{V_k}$, которая называется волновым числом.

6.3. Адаптивные фильтры.

Выполнение предпосылок относительно спектрально-корреляционных характеристик полезного сигнала и осложняющих его помех, является необходимым требованием для корректного решения конкретной задачи посредством фильтрации геофизического поля, а их невыполнение ставит под сомнение полученные теоретические выводы, снижает качество обработки и нередко приводит к ошибочным результатам.

Наиболее распространенными предположениями относительно свойств наблюдаемых геофизических полей при построении линейных оптимальных фильтров являются:

- представление наблюдаемого геофизического поля в виде суммы $f_n = f_{a_1} + f_{a_2} + \dots + f_{a_m} + n_1 + n_2 + \dots + n_k$ полезных сигналов $f_{a1}, f_{a2}, \dots, f_{am}$ и осложняющих их помех $n_1, n_2, \dots, n_k$ (адаптивная модель поля).
- предположение о стационарности спектрально-корреляционных характеристик полезного сигнала и помехи.

Реально наблюдаемые геофизические наблюдения редко удовлетворяют этим жестким требованиям, а предположение о стационарности спектрально-корреляционных характеристик геофизических полей по площади практически не выполняются. Таким образом, применение линейных оптимальных фильтров, из-за невыполнения предпосылок относительно свойств полезного сигнала и помех, не всегда приводит к качественным конечным результатам без предварительной обработки исходной информации.

Решение возникшей проблемы возможно либо путем предварительного разбиения площади наблюдений на участки, стационарные по спектрально-корреляционным характеристикам с целью их дальнейшей фильтрации традиционными алгоритмами, либо путем построения оптимальных линейных фильтров, не требующих выполнения упомянутых выше предпосылок.

Очевидно, что разбиение площади исследований на стационарные области⁶ и их дальнейшая фильтрация неэффективно и нетехнологично. Вывод аналитических выражений для фильтров, учитывающих нестационарность спектрально-корреляционных характеристик полезного сигнала и помехи по площади, представляет собой сложную математическую задачу, не решенную на сегодняшний день. Задача становится еще более сложной в случае отсутствия информации о параметрах полезного сигнала или помехи.

⁶ что является далеко нетривиальной задачей.

Рассмотрим оригинальный подход к построению одномерных, двумерных и трехмерных, линейных и нелинейных, оптимальных и неоптимальных фильтров, предназначенных для обработки нестационарных геофизических полей, способных настраиваться (адаптироваться) на изменение спектрально-корреляционных характеристик поля и мешающих помех, непосредственно в процессе фильтрации.

6.3.1. Одномерная адаптивная фильтрация.

Начнем с рассмотрения самого простого, профильного варианта адаптивного фильтра, учитывающего нарушение стационарности поля вдоль профиля наблюдений. Алгоритм построения обычного одномерного линейного оптимального фильтра сводится к следующей процедуре:

- по значениям поля на профиле наблюдений оценивается автокорреляционная функция $R(m)$.
- выбирается размер окна фильтрации n по значению радиуса корреляции r_0 .
- в зависимости от критерия оптимальности фильтра, на основе имеющийся информации о параметрах корреляционных свойств) полезного сигнала и помех, или на основе их оценок по значениям поля на профиле, вычисляются весовые коэффициенты конкретного оптимального фильтра $\vec{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$.
- далее осуществляется свертка значений поля на профиле с весовыми коэффициентами фильтра в скользящем окне фиксированного размера.

Очевидно, что оценки параметров сигнала и помехи, полученные по данным всего профиля, для нестационарных полей не являются состоятельными, и соответственно весовые коэффициенты линейного фильтра, вычисленные на их основе, не будут адекватными конкретному критерию оптимальности. Так, структура автокорреляционной функции, рассчитанной по всему профилю наблюдений, отражает корреляционные характеристики наиболее энергоемких аномалий на профиле. Соответственно, в результате энергетической фильтрации, базирующейся на оценки автокорреляционных функции входного сигнала при некоррелируемой помехе, оптимальным образом будут оценены параметры именно этих аномалий. Для оценки параметров менее энергоемких аномалий, то есть аномалий с другими спектрально-корреляционными характеристиками, необходима повторная фильтрация остаточного поля, за которое принимается разность между исходным полем и результатом первой фильтрации.

Отметим, что для стационарных процессов вообще невозможно механическое перенесение понятий, разработанных для стационарных процессов. Такие понятия,

как автокорреляция и спектр, имеющие определенный смысл для стационарных наблюдений, нуждаются в определении для нестационарных.

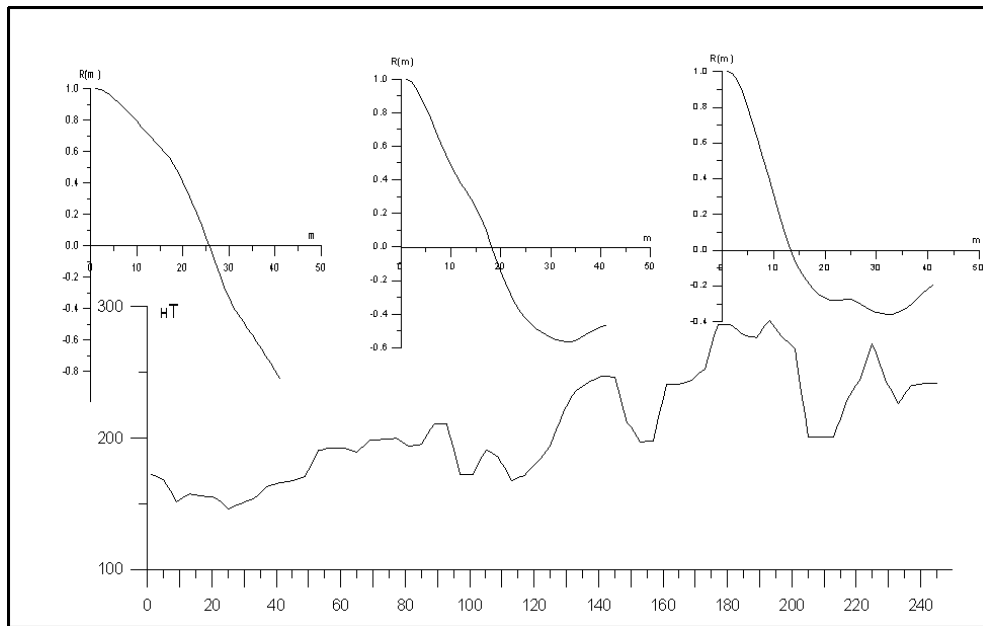


Рис.6.1. Иллюстрация изменения формы автокорреляционной функции наблюдаемого поля вдоль профиля.

Пример, наглядно иллюстрирующий изменение корреляционных характеристик магнитного поля вдоль профиля, приведен на рисунке 1.1.

Здесь число точек наблюдения на профиле составляет 250. В верхней части рисунка изображены три автокорреляционные функции, рассчитанные по трем выборкам из 100 точек, расположенных соответственно в левой, центральной и правой частях профиля. Характер автокорреляционных функций свидетельствует о наличии существенных различий между ними.

Рассмотрим алгоритм построения одномерного энергетического фильтра, настраивающегося на изменение спектрально-корреляционных характеристик поля вдоль профиля непосредственно в процессе фильтрации и позволяющего оценить форму аномалий на профиле с различными спектрально-корреляционными характеристиками, не прибегая к повторной фильтрации остаточного поля (адаптивный фильтр). Существо алгоритма заключается в следующем:

1. Как и в случае обычной энергетической фильтрации с целью оценки корреляционных характеристик наиболее энергоемких (как правило наиболее протяженных) аномалий на профиле рассчитывается автокорреляционная функция $R(m)$ по всему профилю наблюдения.

2. По значению радиуса корреляции r_0 выбирается размер так называемого базового окна⁷ адаптивного фильтра $n_B \approx 1.2r_0$, который заведомо больше ширины наиболее энергоемкой (чаще всего и протяженной) составляющей поля на профиле.

3. Базовое окно размещается в левой части профиля и в его окрестностях выполняется процедура обыкновенной энергетической фильтрации, которая сводится к оценке автокорреляционной функции $R(m)$ (по значениям поля в базовом окне), определению длины текущего окна фильтрации n_T и весовых коэффициентов фильтра $\vec{h}_T$ из уравнения $[R_s - \lambda_{\max} I] \vec{h}_T = 0$ (здесь R_s - оценка корреляционной матрицы аномалии размерности n_T , $\lambda_{\max}$ - максимальное собственное значение матрицы R_s , I - единичная матрица).

4. Затем осуществляется свертка исходного поля с весовыми коэффициентами фильтра $y_j = \sum_{i=-n_m/2}^{n_m/2} f_{j+i} h_{i+n_m/2+1}$, результат которой относится к центральной точке базового окна.

5. Базовое окно сдвигается на пикет вдоль профиля наблюдений, и процедура повторяется, начиная с третьего пункта.

Таким образом, в предложенном алгоритме для получения профильтрованного значения поля в каждой точке профиля выбираются собственные параметры фильтра - длина окна фильтрации и весовые коэффициенты фильтра. При этом характеристики фильтра настраиваются на оценки параметра наиболее энергоемких аномалий в окрестностях базового окна в отдельной точке наблюдений. Так, если в окрестностях точки отсутствуют аномалии, то ширина окна фильтрации будет минимальной, и весовые коэффициенты фильтра будут определяться спектрально-корреляционными характеристиками помехи. При наличии в окрестности точки самых протяженных аномалий ширина окна фильтрации будет максимальной и, соответственно, весовые коэффициенты фильтра будут определяться спектрально-корреляционными характеристиками этих аномалий.

Покажем преимущества адаптивного энергетического фильтра на примере обработки конкретных данных. На рисунке 6.2(а) изображен график вертикальной составляющей магнитного поля ΔZ . В левой части графика присутствует протяженная положительная аномалия, а в правой - две положительные аномалии меньших размеров.

⁷ Под базовым окном понимается окно, размер которого не меньше наиболее энергоемких и протяженных аномалий, присутствующих на профиле. По точкам, попадающим в это окно, оцениваются корреляционные характеристики поля в окрестности каждой точки.

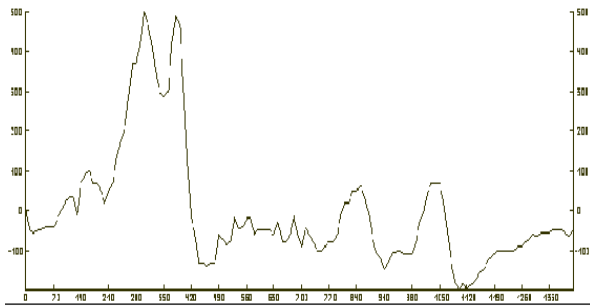


Рис.6.2(а). Наблюдаемое магнитное поле dZ.



Рис.6.2(б). Результат первой фильтрации исходного поля.

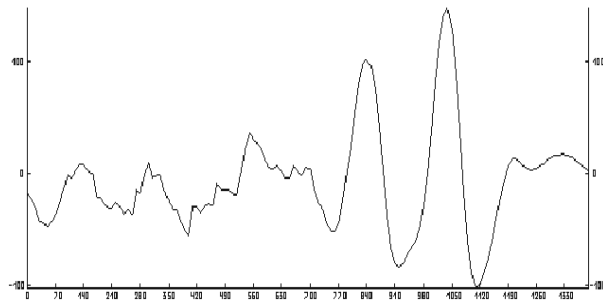


Рис.6.2(с). Результат фильтрации остаточного поля.

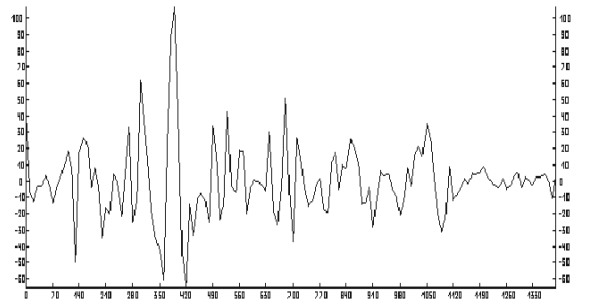


Рис.6.2(д). Остаточное поле после второй фильтрации.

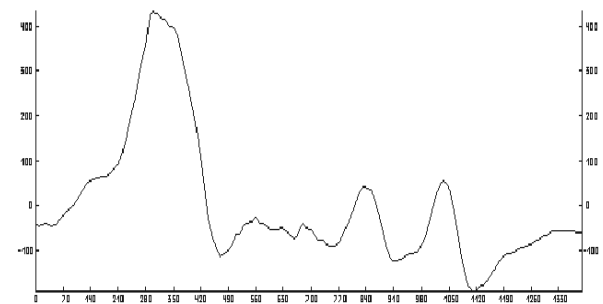


Рис.6.2(е). Результат адаптивной фильтрации исходного поля.

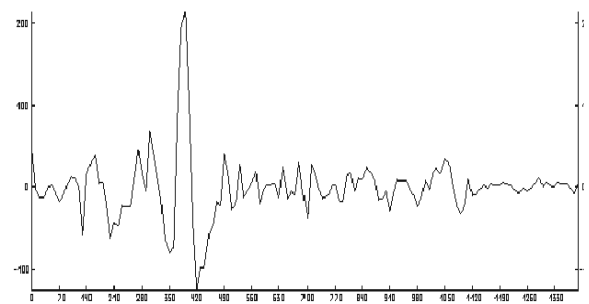


Рис.6.2(г). Остаточное поле после адаптивной фильтрации.

На рисунках 6.2(б), 6.2(с), 6.2(д) приведены результаты фильтрации исходного поля обычным энергетическим фильтром соответственно: результат фильтрации исходного поля, остаточного поля после первой фильтрации и остаточное поле после второй фильтрации. На рисунках 6.2(е) и 6.2(г) изображены соответственно результат фильтрации поля адаптивным энергетическим фильтром и остаточное поле. Анализ полученных результатов показывает, что после первой обычной фильтрации представляется возможным оценить лишь форму наиболее энергоемкой аномалии в левой части профиля (рис. 6.2(б)).

Параметры менее энергоемких аномалий, расположенных в правой части профиля, определяются лишь после повторной фильтрации остаточного поля рис.6.2(с). В то же время, с помощью алгоритма адаптивной энергетической фильтрации, возможна корректная оценка параметров сразу двух типов аномалий рис.6.2(е). Совпадение

остаточных составляющих на рисунках рис.6.2(d) и рис.6.2(g) является подтверждением правильности основных принципов построения адаптивного алгоритма.

Рассмотренный алгоритм адаптивной одномерной энергетической фильтрации профильных наблюдений можно легко модифицировать для реализации других оптимальных линейных фильтров, для чего необходимо изменить лишь способ расчета весовых коэффициентов фильтра.

6.3.2. Двухмерная адаптивная фильтрация.

Прежде чем перейти к построению двумерного адаптивного фильтра, приведем обобщенную схему обычной двумерной линейной оптимальной фильтрации геофизических полей, которая заключается в следующем:

- рассчитывается двумерная автокорреляционная функция $ДАКФ(m, p)$ по всей площади наблюдения, здесь m - величина смещения по пикетам, p - величина смещения между профилями.

- по значениям радиусов корреляции между пикетами r_{0x} и профилями r_{0y} выбирается соответственно ширина $n = r_{0x}$ (число пикетов) и высота $m = r_{0y}$ (количество профилей) окна фильтрации.

- по форме $ДАКФ(m, p)$ определяется наклон окна фильтрации θ , который, как правило, совпадает с направлением простирания наиболее энергоемких аномалий.

- в зависимости от критерия оптимальности, на основе имеющейся информации о спектрально-корреляционных свойствах полезного сигнала и помех, или на основе их оценок, вычисляются весовые коэффициенты двумерного фильтра $\vec{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n, h_{n+1}, \dots, h_{nm-1}, h_{nm}\}$.

- в скользящем окне фиксированных размеров и выбранного наклона осуществляется двумерная свертка исходного поля с весовыми коэффициентами фильтра.

Таким образом, основные параметры двумерного фильтра (весовые коэффициенты $\vec{h}$, ширина n , высота m и наклон окна θ фильтрации) определяются один раз для всей площади наблюдений.

Как и в случае одномерной фильтрации необходимые для расчета весовых коэффициентов фильтра оценки корреляционных характеристик полезного сигнала и помех, при не выполнении условия стационарности поля, не являются состоятельными. Так, структура двумерной автокорреляционной функции $ДАКФ(m, p)$, рассчитанной по всем точкам площади наблюдений, отражает корреляционные характеристики наиболее энергоемких аномалий, что не позволяет осуществить фильтрацию с целью оценки

параметров менее энергоемких и имеющих отличное от основного простираение аномалий.

Алгоритм построения двумерного адаптивного энергетического фильтра, предназначенного для обработки нестационарных геофизических полей, настраивающегося на изменение спектрально-корреляционных характеристик аномалии и помех по площади, непосредственно в процессе фильтрации заключается в следующем:

1. Как и при обычной двумерной фильтрации, по всей площади наблюдений для определения корреляционных характеристик и размеров наиболее энергоемких (чаще всего и протяженных) аномалий рассчитывается двумерная автокорреляционная функция $ДАКФ(m, p)$.

2. По значениям радиуса корреляции r_x вдоль профилей и между ними r_y выбираются размеры так называемого двумерного базового окна⁸ двумерного адаптивного фильтра (соответственно ширина $n_B = 1.2r_x$ в пикетах и высота $m_B = 1.2r_y$ в профилях), которые при таком подходе заведомо больше размеров самых энергоемких аномалий.

3. Базовое окно размещается в левом верхнем углу исследуемой площади и по значениям поля, попадающим в окно, рассчитывается текущая двумерная автокорреляционная функция $ДАКФ_T(m, p)$.

4. По $ДАКФ_T(m, p)$ определяются текущие значения радиусов корреляции между пикетами r_{x_T} и профилям r_{y_T} , а также значения ширины $n_T = 1.2r_{x_T}$, высоты $m_T = 1.2r_{y_T}$ и наклона θ_T текущего окна фильтрации.

5. Из уравнения $[R_s - \lambda_{\max} I] \vec{h}_T = \vec{0}$ находятся весовые коэффициенты фильтра $\vec{h}_T = \{h_{11}, h_{12}, \dots, h_{1,n_T}, h_{2,1}, \dots, h_{n_T,m_T}\}$ (R_s - оценка расширенной корреляционной матрицы полезного сигнала размерностью $n_T \times m_T$, $\lambda_{\max}$ - максимальное собственное значение матрицы R_s).

6. Осуществляется двумерная свертка значений поля f_{jl} с весовыми коэффициентами фильтра

$$y_{jl} = \sum_{k=-m_T/2}^{m_T/2} \sum_{i=-n_T/2}^{n_T/2} f_{j+i,l+k} h_{i+\frac{n_T}{2}+1,k+\frac{m_T}{2}+1}, j = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, M \quad (1.7)$$

и результат относится к центральной точке базового окна.

⁸ Под двумерным базовым окном понимается прямоугольное окно, размеры которого не меньше размеров наиболее энергоемких аномалий.

7. Базовое окно смещается по пикетам и профилям и процедура повторяется, начиная с третьего шага схемы.

Таким образом, при адаптивной фильтрации, в окрестностях базового окна каждой точки наблюдения, осуществляется локальная фильтрация с уникальными параметрами и весовыми коэффициентами фильтра, отражающими изменение спектрально - корреляционных характеристик поля по площади. Так, если в окрестностях определенной точки отсутствуют аномалии, то ширина и высота окна фильтрации будут минимальными. При наличии в окрестностях точки самых энергоемких и протяженных аномалий ширина и высота окна фильтрации будут максимальными, но не превышающими размеров базового окна.

Как и в одномерном случае, важнейшие параметры предложенного выше алгоритма двумерного адаптивного фильтра: размеры базового окна n_B, m_B , ширина n_T и высота m_T текущего окна фильтрации, связаны с переменными n, N и m, M из выражения для операции дискретной двумерной свертки.

Для иллюстрации преимущества предлагаемого алгоритма рассмотрим результаты, полученные при обработке модельного поля (рис. 6.3.a) неадаптивным и адаптивным двумерным энергетическим фильтром. Модельное поле представлено суммой некоррелированной помехи и V -образной положительной аномалии при этом ее амплитуда соизмерима с дисперсией помехи.

На рисунках 6.3.b и 6.3.c изображены результаты фильтрации исходных данных неадаптивным двумерным энергетическим фильтром соответственно при северо-восточном и северо-западном наклонах окна фильтрации. В первом случае наклон окна совпадает с простираем правой ветви аномалии, во втором - с простираем левой ветви. Результаты фильтрации адаптивным двумерным энергетическим фильтром приведен на рисунке 6.3.d.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод о том, что использование обычного (неадаптивного) фильтра приводит к "размыванию" аномалии при несовпадении наклона окна фильтрации с простираем аномалии. Так, при северо-западном наклоне окна искажается форма левой ветви аномалии, а при северо-восточном наклоне окна - правой. Применение адаптивного фильтра позволяет избежать подобного отрицательного эффекта за счет его способности адаптироваться к изменению корреляционных характеристик поля непосредственно в процессе фильтрации.

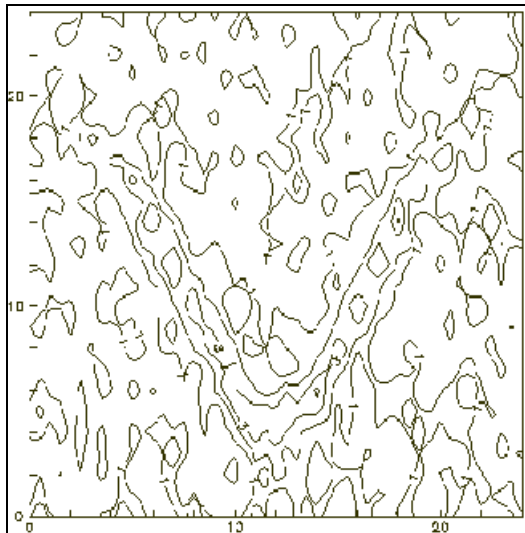


Рис.6.3.a. Исходное модельное поле.

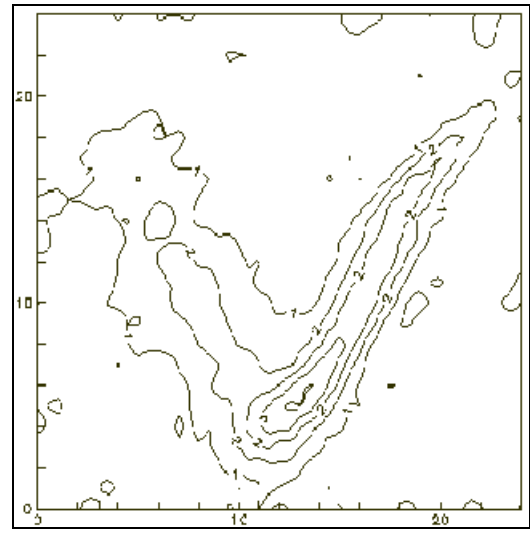


Рис. 6.3.b. Северо-восточный наклон окна фильтрации.

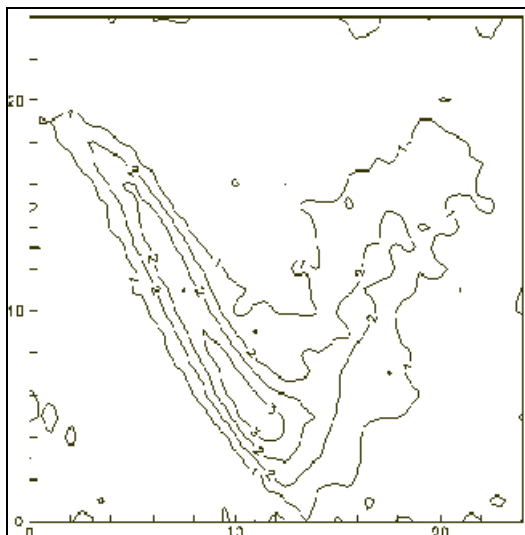


Рис.6.3.c. Северо-западный наклон окна фильтрации.

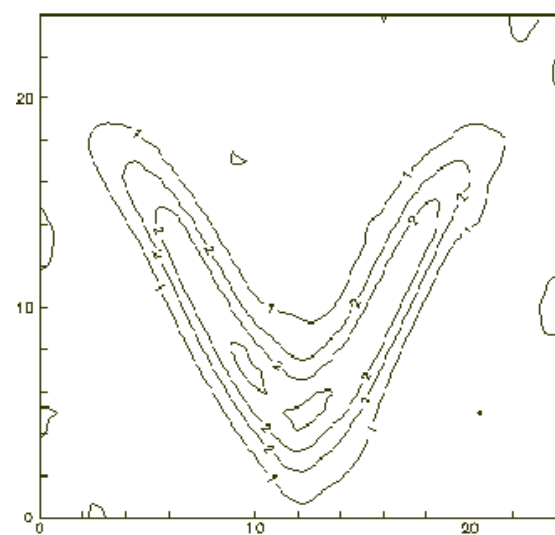


Рис.6.3.d. Результат двумерной адаптивной фильтрации.

Очевидно, что, как и в одномерном случае, в рамках предложенного подхода, не представляет трудностей реализация различных оптимальных (винеровского, согласованного) и неоптимальных двумерных адаптивных фильтров. В программном комплексе "*КОСКАД 3D*" реализованы энергетический, энтропийный, медианный и другие.

6.3.3. Полиномиальная адаптивная фильтрация.

Рассмотрим еще один подход к построению линейных фильтров, ориентированных на повышение эффективности фильтрации нестационарных геофизических полей. Его суть состоит в комбинировании идей, описанных в предыдущих подразделах, и оригинального использования особенностей полиномиальных методов фильтрации.

Обычная полиномиальная фильтрация заключается в аппроксимации наблюдений

полиномом в общем случае двух переменных k -ой степени вида: $P = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{j-k} a_{ij} x^i y^j$ - где

x, y - координаты точек сети наблюдения. Число членов такого полинома определяется выражением: $n = (k + 1)(k + 2) / 2$.

Наиболее часто полиномиальная фильтрация применяется в задачах тренд-анализа, для оценки региональной (низкочастотной) составляющей поля. При этом степень полинома принимается равной единице, двум или трем, что соответствует аппроксимации исходных значений плоскостью, параболической или кубической поверхностью. Коэффициенты аппроксимирующего полинома находят с учетом значений поля во всех точках сети наблюдений.

Наиболее эффективно применение полиномиальной фильтрации в случаях, когда априори известно, что трендовая составляющая представлена полиномом определенной степени.

Рассмотрим алгоритм адаптивной полиномиальной фильтрации, учитывающей нестационарность поля по площади, посредством локализации оценок спектрально-корреляционных свойств поля и соответствующего изменения параметров фильтра (ширины, высоты, наклона и степени аппроксимирующего полинома). Блок-схема такого алгоритма заключается в следующем.

Известно, что ориентация поверхности аппроксимирующего полинома обычно совпадает с корреляционным направлением исходного поля. Это делает несущественным такой параметр двумерного адаптивного фильтра, как текущий наклон θ_T окна фильтрации. Свойство аппроксимирующего полинома ориентироваться вдоль корреляционного направления в текущем окне, делает адаптивный полиномиальный фильтр более эффективным по сравнению с обычным двумерным адаптивным фильтром.

При полиномиальной фильтрации все точки внутри окна являются равноправными в отличие от других видов фильтраций, когда имеется одна исключительная точка, а именно центр окна, к которой и приписывается полученное в результате свертки профильтрованное значение поля. В связи с этим обстоятельством появляется возможность накопления информации, суть которого заключается в следующем. Каждая точка сети в процессе обработки попадает в некоторое множество окон, каждый раз получая очередное значение соответствующего полинома, равноправное со всеми другими. Результирующая величина в каждой точке, при таком накоплении, вычисляется как среднее значение из всех имеющихся в этой точке. Процесс накопления не

эквивалентен увеличению размеров окна фильтра и не является рекурсией в чистом виде, поскольку значения поля из ближайшего окружения любой точки сети попадают в большее число окон по сравнению с удаленными точками и, следовательно, будут иметь больший вес. Таким образом, процесс накопления также изменяет параметры выходного сигнала в зависимости от свойств исходного поля в окружении конкретной точки.

ГЛАВА VII. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФИЛЬТРЫ.

Рассмотренные в предыдущей главе линейные фильтры для заданного диапазона частот реализуются без учета априорных сведений о помехах. При их построении предполагается, что область задания полосы частот соответствует частотным составляющим полезных сигналов, а вне ее - частотным составляющим помех. В то же время, если имеется априорная информация о спектральных или корреляционных свойствах сигналов и помех, можно обеспечить выделение сигналов с учетом этой информации, что приводит к реализации оптимальных фильтров.

Рассмотренные в главе VI линейные фильтры являются неоптимальными, а построение оптимальных фильтров с учетом знания (задания) спектральных или корреляционных свойств сигналов и помех обеспечивает наилучшим образом выделение сигналов на фоне помех. Оптимальные фильтры реализуются на основе того или иного критерия оптимальности.

В практике обработки геофизических данных нашли применение три критерия оптимальности: минимизация среднеквадратического отклонения профильтрованного сигнала от желаемого сигнала на выходе фильтра – фильтр Колмогорова-Винера, максимизация пикового отношения сигнал/помеха на выходе фильтра – согласованный фильтр; максимизация энергетического отношения сигнал/помеха на выходе фильтра – энергетический фильтр.

Построение оптимальных фильтров осуществляется с учетом:

- задачи обработки данных;
- заданной модели исходных данных;
- выбранного критерия оптимальности, ориентированного на решение сформулированной задачи обработки и заданные модели сигнала и помех, т.е. априорные сведения об их спектральных или корреляционных свойствах.

7.1. Фильтр Колмогорова-Винера и его применение.

Фильтр Колмогорова-Винера строится на основе критерия минимума среднеквадратического отклонения $\bar{\varepsilon}^2$ профильтрованного сигнала $y_j = \sum h_i f_{j-i}$ от желаемого сигнала $\hat{s}_j$ на выходе фильтра, т.е.

$$\bar{\varepsilon}^2 = \overline{\left(\sum h_i f_{j-i} - \hat{s}_j \right)^2} \Rightarrow \min \quad (7.1).$$

Черта сверху означает усреднение ошибки отклонения $\bar{\varepsilon}^2$ по всем j -ым значениям. Впервые критерий был сформулирован А.Н.Колмогоровым в 1939 г. И им было выведено на его основе уравнение фильтра для решения задачи сглаживания. Н.Винер в 1949 г. повторил результат А.Н.Колмогорова, но Н.Винер был первым, кто реализовал практическое применение уравнения для решения ряда технических задач. В зарубежных публикациях этот фильтр известен как винеровский фильтр (Wiener filter).

А.Н.Колмогоров сформулировал критерий в предположении о стационарном случайном характере сигнала и помех с известными их корреляционными свойствами, т.е. с известными АКФ, или их спектральными свойствами, т.е. с известными энергетическими спектрами.

В этих предположениях минимизация среднеквадратической ошибки отклонения профилированного сигнала от желаемого для выражения (7.1) приводит к решению системы линейных уравнений вида:

$$\sum_{i=0}^M h_i R_f(m-i) = B_{sf}^{\wedge}(m) \quad (7.2)$$

Уравнение (7.2) представляет дискретный аналог уравнения Колмогорова-Винера, которое для непрерывных стационарных процессов выражается как $\int h(\tau) R_f(t-\tau) d\tau = B_{sf}^{\wedge}(t)$ и известно под названием уравнения Винера-Хопфа.

В выражении (7.2) h_i – искомая весовая функция фильтра; $R_f(m-i)$ – корреляционная матрица исходных данных; $B_{sf}^{\wedge}(m)$ – взаимно корреляционная функция желаемого сигнала $\hat{s}$ с исходными данными f .

При аддитивной модели поля $f_j = s_j + n_j$ выражение (7.2) можно переписать как: $\sum h_i [R_s(m-i) + R_n(m-i)] = B_{sf}^{\wedge}(m)$, где $R_s(m-i)$ и $R_n(m-i)$ – корреляционные матрицы сигнала и помех, построенные при заданных АКФ.

Отсюда получаем, что $h_0 = \frac{101}{112}$ и $h_1 = \frac{3}{112}$.

Обычно, чтобы не было усиления сигнала на выходе фильтра за счет свертки весовые коэффициенты нормируют путем $h_0^2 + h_1^2 = 1$.

Применяя к выражению (7.3) свойства преобразований Фурье о линейности и свертке, получаем частотную характеристику фильтра Колмогорова-Винера $H(\omega)$, а именно: $H(\omega)[w_s(\omega) + w_n(\omega)] = w_s(\omega)$, где $w_s(\omega)$ и $w_n(\omega)$ - энергетические спектры сигнала и помех, рассчитанные по заданным АКФ, т.е.

$$H(\omega) = \frac{w_s(\omega)}{w_s(\omega) + w_n(\omega)} \quad (7.5).$$

Преимущества оптимального фильтра воспроизведения по сравнению с неоптимальными фильтрами сглаживания состоит в возможности получения оценок качества фильтрации. Для фильтра воспроизведения качество оценивается среднеквадратической погрешностью

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w_s(\omega)w_n(\omega)}{w_s(\omega) + w_n(\omega)} d\omega \quad (7.6).$$

Из последнего выражения следует, что если спектральная плотность помех мала по сравнению со спектральной интенсивностью сигнала, т.е. $w_n(\omega) \ll w_s(\omega)$, то

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} w_n(\omega) d\omega = R_n(0) = \sigma^2, \quad \text{что означает равенство среднеквадратической}$$

погрешности сглаживания (воспроизведения) сигнала дисперсии помех σ^2 .

Применение фильтра Колмогорова-Винера не ограничивается решением задач сглаживания, оно значительно шире. Поэтому ниже приводятся примеры использования фильтра для ряда часто встречающихся в практике обработки геофизических данных задач.

7.1.1. Выделение аномалий антиклинального типа в гравirazведке.

Аномалии антиклинального типа в гравirazведке описываются АКФ гауссова типа. В общем случае эта наиболее распространенная модель для гравитационных аномалий, за исключением аномалии от ступени. АКФ гауссова типа имеет вид:

$$R_s(m) = \frac{\bar{a}_s^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m^2}{r_s^2}\right); \quad R_n(m) = \frac{\sigma_n^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{m^2}{r_n^2}\right), \text{ где } \bar{a}_s^2 \text{ и } \sigma_n^2 - \text{ дисперсии}$$

аномалии и помехи, r_s и r_n - их интервалы корреляции. Соответствующие этим АКФ энергетические спектры:

$$w_s(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{a}^2 \exp(-m^2 / r_s^2) \cos \omega m dm = \bar{a}^2 r_s \sqrt{\pi} / 2 \exp(-\omega^2 r_s^2 / 4) \quad (7.7).$$

$$w_n(\omega) = \sigma^2 \sqrt{\pi} / 2 \exp(-\omega^2 r_n^2 / 4)$$

На основе энергетических спектров аномалии и помех найдем частотную характеристику фильтра воспроизведения

$$H(\omega) = \frac{w_s(\omega)}{w_s(\omega) + w_n(\omega)} = \frac{1}{1 + w_n(\omega) / w_s(\omega)} \quad (7.8)$$

Если принять, что аномалия соизмерима по интенсивности с уровнем помех, т.е. $\bar{a}^2 = \sigma^2$, а ее интервал корреляции r_s в пять раз больше интервала корреляции помехи, т.е. $r_s = 5r_n$, из (7.8) с учетом (7.7) получаем:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + (1/5) \exp 6\omega^2} \quad (7.9).$$

Весовую функцию находим как обратное преобразование Фурье от частотной характеристики фильтра (7.9)

$$h_i = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega i \Delta x d\omega}{1 + (1/5) \exp 6\omega^2}.$$

Интеграл при расчете h_i вычисляется по формуле трапеций. Переходя к дискретному аналогу свертки получим профильтрованные значения поля f_j :

$$\begin{aligned} y_j &= \frac{1}{\pi} \sum f_{j-i} \left(0,293 \frac{\sin 0,8i\Delta x}{0,8i\Delta x} + 0,172 \frac{\sin 0,4i\Delta x}{0,4i\Delta x} \right) = \\ &= 0,148 f_j + 0,136(f_{j+1} + f_{j-1}) + 0,107(f_{j+2} + f_{j-2}) + 0,069(f_{j+3} + f_{j-3}) + 0,033(f_{j+4} + f_{j-4}) \end{aligned}$$

7.1.2. Построение обратного фильтра.

Обратная фильтрация или **деконволюция** широко используется в сейсморазведке для повышения разрешающей способности временных разрезов. Цель обратной фильтрации – максимально приблизить сейсмический сигнал к дельта-функции, поэтому обратный фильтр также называют **фильтром сжатия**. Идеальный

обратный фильтр имеет частотную характеристику $H(\omega) = \frac{1}{s(\omega)} = \frac{s^*(\omega)}{|s(\omega)|^2}$, где $s(\omega)$ - спектр желаемого сигнала, а $s^*(\omega)$ - его комплексно-сопряженный спектр. Очевидно, что для такой частотной характеристики на выходе фильтра при спектре входного сигнала $F(\omega)$, совпадающим со спектром $s(\omega)$ получаем $Y(\omega) = H(\omega)F(\omega) = \frac{1}{s(\omega)} s(\omega) \Rightarrow 1$, который и соответствует во временной области единичному импульсу или дельта-функции.

Однако идеальный обратный фильтр не может быть реализован на практике, поскольку реальные сигналы на некоторых частотах принимают близкие к нулю значения, в частности из-за его искажения помехами. При этом на таких частотах $|H(\omega)| \rightarrow \infty$ и фильтр становится неустойчивым.

Для исключения деления на нуль к спектру сигнала добавляют стабилизирующий коэффициент α , а именно $H(\omega) = \frac{s^*(\omega)}{|s(\omega)|^2 + \alpha}$, где величина коэффициента α задается в 5-10% от максимальной величины спектра сигнала. Это обеспечивает существенное повышение устойчивости обратного фильтра, однако возникает проблема уже по определению оптимальной величины α .

Использование общего уравнения фильтра Колмогорова-Винера (7.1), в котором в качестве желаемого сигнала $\hat{s}$ задается дельта-функция $\delta(t)$, позволяет решить вопрос о величине α и тем самым обеспечить построение оптимального обратного фильтра.

Действительно, если принять $\hat{s}(t) = \delta(t)$, тогда функция взаимной корреляции $B_{ss}(\tau) = \overline{\delta(t)s(t-\tau)} = s(-\tau)$ и уравнение Колмогорова-Винера принимает вид:

$$\sum_i h_i [R_s(m-i) + R_n(m-i)] = s(-m), \text{ при}$$

$$s(-\tau) \equiv s(-m) \quad (7.10)$$

Применяя свойства преобразований Фурье для (7.10) получим частотную характеристику оптимального обратного фильтра

$$H(\omega) = \frac{s^*(\omega)}{|s(\omega)|^2 + w_n(\omega)} \quad (7.11),$$

где $w_n(\omega)$ - энергетический спектр помех и, таким образом, оптимальной величиной коэффициента α , повышающего устойчивость фильтра, является спектральная плотность помех $w_n(\omega)$.

Обратная фильтрация при обработке временных разрезов используется неоднократно, до суммирования по ОГТ, после этого суммирования, после проведения веерной фильтрации и т.д.

7.1.3. Построение фильтра прогнозирования.

На базе фильтра Колмогорова-Винера реализуется также построение **фильтра прогнозирования** для решения задачи прогноза или предсказания значений поля в «будущих», например, еще не измеренных, точках $x_k = k\Delta x$ ($k > 1$).

При этом для правой части уравнения (7.2) желаемым сигналом $\hat{s}_j$ является сам входной сигнал f_i , т.е. $\hat{s}_j = f_j$ в последующие моменты, например, времени, и взаимно корреляционная функция будет определена, как

$$B_{sf}^{\wedge} = R_f(m+k) \quad (7.12)$$

Практическая реализация фильтра прогноза (7.12) сводится к многократному решению систем линейных уравнений для каждого заданного значения $k = 1\Delta; 2\Delta; \dots$ Правая часть (7.12) при $k = \Delta$ представляет автокорреляционную функцию исходного поля без ее значения при $m=0$, при $k = 2\Delta$ - ту же АКФ без первых двух ее значений и т.д. После нахождения весовой функции для каждого значения k реализуется ее свертка с исходными значениями, что обеспечивает нахождение величины прогнозируемого значения поля. Фильтр прогнозирования предсказывает будущие значения сигнала по предшествующим значениям, т.е. «истории» входного сигнала и помехи. Следовательно, этот фильтр можно использовать и для решения задач интерполяции поля в любые наперед заданные точки.

На основе фильтра прогноза был построен новый метод оценки энергетических спектров, предложенный И.Бургом, отличающийся увеличением разрешающей способности по сравнению со спектрами Фурье. Однако дальнейшие его исследования позволили установить появление «ложных» экстремумов в спектре, не отвечающих реально наблюдаемым частотам.

7.2. Согласованный фильтр.

Согласованный фильтр, или **фильтр обнаружения**, строится на основе критерия максимума пикового отношения сигнал/помеха на выходе фильтра и предназначен для решения задачи обнаружения сигнала. Под **обнаружением сигнала** понимается установление лишь факта наличия сигнала, достигаемое, в частности, за

счет существенного искажения формы сигнала. Заметим, что выделение сигнала предусматривает оценку формы сигнала. Для согласованного фильтра обычно это невозможно. В то же время обнаружение сигнала обеспечивается для слабых сигналов с отношениями сигнал/помеха ниже уровня интенсивности помех.

Математической моделью для согласованного фильтра является аддитивная модель поля $f_j = s_j + n_j$, для которой предполагается знание формы сигнала, а не его АКФ, как для фильтра Колмогорова-Винера.

Помеха задается в виде стационарного случайного процесса с известной АКФ, определяемой на участках с отсутствием полезных сигналов. Выбор формы сигнала (аномалии) осуществляется либо путем решения прямой задачи для конкретного геофизического метода, либо посредством анализа наблюдаемых значений над аномалиеобразующими объектами, где форма сигналов фиксируется визуально. При обработке временных разрезов в сейсморазведке оценка формы сигнала реализуется по значениям ВКФ соседних трасс или трасс, расположенных через некоторое удаление друг от друга, с таким расчетом, чтобы нерегулярные волны-помехи были бы некоррелированы.

Значение задачи обнаружения слабых сигналов непрерывно возрастает в связи с поисками глубокозалегающих и слабоконтрастных объектов, эффекты от которых искажены помехами разной природы, а интенсивность помех превосходит амплитуду полезных сигналов.

Критерий максимума пикового отношения сигнал/помеха сводится к максимизации следующего выражения

$$\mu_{\text{блх}} = \frac{\bar{s}_{\text{блх}}^2(x_0)}{\bar{n}_{\text{блх}}^2(x)} = \frac{(\bar{s}'\bar{h})^2}{\bar{h}'R_n\bar{h}} \Rightarrow \max \quad (7.13)$$

Под пиковым отношением сигнал/помеха понимается отношение в одной, центральной точке x_0 выходного сигнала, для которого дисперсия $\bar{s}_{\text{блх}}^2(x_0)$ равна квадрату скалярного произведения значений сигнала и весовой функции $\langle \bar{s}\bar{h} \rangle$, являющегося результатом свертки сигнала и весовой функции для точки $x_0 : (s_0, s_1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_0 \end{pmatrix}$.

Энергия (дисперсия) помехи на выходе фильтра равна квадратичной форме $\bar{h}'R_n\bar{h}$, где $\bar{h}'$ и $\bar{h}$ - соответственно вектор-строка и вектор-столбец значений весовой функции, R_n - корреляционная матрица помехи, построенная для заданной АКФ помехи.

С целью максимизации (7.13) следует взять производную $\partial \mu_{\text{блх}} / \partial \vec{h}^*$ и ее приравнять к нулю, что обеспечивает получение системы линейных уравнений для нахождения весовой функции согласованного фильтра в матричной форме $\vec{h}' R_n = \vec{s}'$ (7.14) или в форме:

$$\sum h_i R_n(m-i) = s(-m) \quad (7.15)$$

Знак минус для абсциссы сигнала $s(-m)$ означает, что значения сигнала отсчитываются с его конца, поскольку при свертке следует перевернуть либо весовую функцию, либо сигнал.

Применяя свойства преобразований Фурье к (7.15), получаем выражение для частотной характеристики согласованного фильтра $H(\omega)$: $H(\omega)w_n(\omega) = s^*(\omega)$, где $s^*(\omega)$ - комплексно-сопряженный спектр сигнала, соответствующий «перевернутому» сигналу, т.е. сигналу, зеркально отражающему относительно оси ординат. Из последнего выражения следует, что

$$H(\omega) = \frac{s^*(\omega)}{w_n(\omega)} \quad (7.16).$$

Из (7.16) легко понять, почему фильтр получил название согласованный. Если помеху принять некоррелированной, то ее спектр определяется лишь значением дисперсии, т.е. $w_n(\omega) = \text{const}$, и $H(\omega) = cs^*(\omega)$. Иначе частотная характеристика фильтра согласована со спектром входного сигнала. Обратное преобразование Фурье при этом позволяет найти, что $h_i = cs(-i)$, т.е. весовая функция согласована с формой сигнала. Иначе значения весовой функции полностью определяются значениями заданного по форме сигнала, а знак «минус» подчеркивает необходимость использования при свертке перевернутых его значений.

Пример 2. Пусть сигнал и помеха, как в примере 1, заданы значениями $(s_0, s_1) = (3, 1), (n_0, n_1) = (1, 0)$, т.е. $R_n(0) = 1; R_n(1) = 0$

В соответствии с уравнением фильтра (7.15) имеем: $(h_0 h_1) \begin{bmatrix} R_n(0) & R_n(1) \\ R_n(1) & R_n(0) \end{bmatrix} = (s_1 s_0)$

или

$$(h_0 h_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (1, 3).$$

Отсюда $h_0 = 1, h_1 = 3$. С учетом нормировки весовой функции

$$h_0^2 + h_1^2 = 1; \quad h_0 = \frac{h_0}{\sqrt{h_0^2 + h_1^2}} = 0,316, \text{ а } h_1 = 0,348.$$

Найдем пиковое отношение сигнал/помеха на выходе фильтра

$$\mu_{\text{вых}} = \frac{(s_1 h_0 + s_0 h_1)^2}{\bar{h}' R_n \bar{h}} = \frac{(s_1 h_0 + s_0 h_1)^2}{(h_0 h_1) \begin{bmatrix} R_n(0) R_n(1) \\ R_n(1) R_n(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \end{bmatrix}} = \frac{(s_1 h_0 + s_0 h_1)^2}{R_n(0) R_h(0) + 2 R_n(1) R_h(1)},$$

где $R_h(0) = h_0^2 + h_1^2$; $R_h(1) = h_0 h_1$.

Подставляя в последнее выражение значения (s_0, s_1) и найденные весовые коэффициенты, получаем $\mu_{\text{вых}} = 10$. На рис.7.1 приведен пример иллюстрирующий результаты согласованной фильтрации.

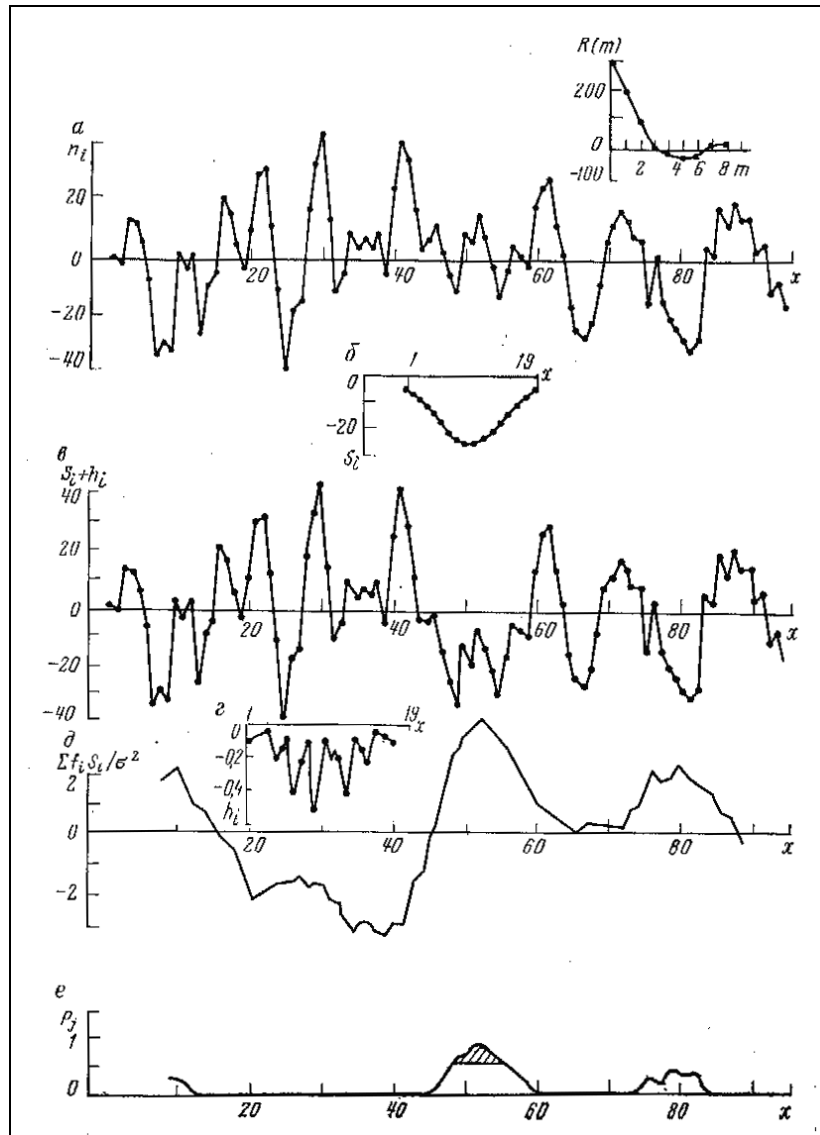


Рис.7.1.Пример согласованной фильтрации. а – помеха и ее корреляционная функция $R(m)$, б – полезный сигнал, в - сигнал плюс помеха, г - весовая функция согласованного фильтра, д - результат согласованной фильтрации, е - апостериорная вероятность наличия сигнала.

7.3. Энергетический фильтр.

Энергетический фильтр строится на основе критерия максимума энергетического отношения сигнал/помеха на выходе фильтра и предназначен для решения задачи выделения сигнала, обладающего наибольшей энергией или дисперсией. В этом отношении следует подчеркнуть его аналогию с методом главных компонент.

Математическая модель поля для энергетического фильтра совпадает с моделью для фильтра Колмогорова-Винера, т.е. сигнал и помеха представлены стационарными случайными процессами с заданными АКФ.

Энергетический фильтр занимает промежуточное положение между фильтром воспроизведения Колмогорова-Винера и согласованным фильтром, поскольку он строится как фильтр обнаружения, так как максимизируется отношение сигнал/помеха, а решает задачу выделения сигнала, т.е. задачу оценки формы наиболее энергоемкого сигнала. Оценка формы сигнала оказывается возможной по причине максимизации энергетического, а не пикового отношения, т.е. отношения по интервалу, определяемого длиной фильтра, а не в одной, центральной точке.

Энергетическое отношение сигнал/помеха на выходе фильтра определяется в виде:

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{\vec{h}' R_s \vec{h}}{\vec{h}' R_n \vec{h}} \Rightarrow \max \quad (7.17),$$

где $\vec{h}'$ и $\vec{h}$ - соответственно вектор-строка и вектор-столбец весовых коэффициентов фильтра, R_s и R_n - корреляционные матрицы сигнала и помехи, построенные по их заданным АКФ.

Дифференцирование $\rho_{\text{вых}}$ по $\vec{h}$ в (7.17) и приравнивание производной к нулю приводит к системе линейных уравнений в матричной форме

$$\vec{h}' [R_s - \lambda_{\max} R_n] = \vec{0}' \quad (7.18)$$

где $\lambda_{\max}$ - есть энергетическое отношение сигнал/помеха, т.е. $\rho_{\text{вых}} = \lambda_{\max}$. В то же время $\lambda_{\max}$ является максимальным собственным значением разностной матрицы $[R_s - \lambda R_n]$, а h_i при этом представляет значения собственного вектора, соответствующего $\lambda_{\max}$. Неопределенность решения уравнения (7.18), связанная с равенством правой части нулю, снимается путем нормировки весовых коэффициентов $\sum h_i^2 = 1$.

Из рассмотрения энергетического фильтра раскрывается физический смысл максимального собственного значения $\lambda_{\max}$, представляющего не что иное, как энергетическое отношение сигнал/помеха на выходе фильтра.

Профильтрованный сигнал на выходе фильтра $y_i = \sum h_i f_{j-i}$ с весовой функцией, представленной собственным вектором, соответствующим $\lambda_{\max}$, является первой главной компонентой в методе главных компонент. Физический смысл $\lambda_{\max}$ позволяет считать, что выходной сигнал y_j обеспечивает выделение составляющей наблюдаемого поля, обладающей наибольшей энергией.

В модели поля $f_j = s_{\text{рег},j} + s_{\text{лок},j} + n_j$ такой составляющей оказывается региональный тренд, а в модели $f_j = s_{\text{лок},j} + n_j$ - локальная составляющая.

Пример 3. Пусть сигнал и помеха заданы теми же значениями, что и в примерах 1 и 2, т.е. $(s_0, s_1) = (3, 1), (n_0, n_1) = (1, 0)$. Их автокорреляции $R_s(0) = 10; R_s(1) = 3; R_n(0) = 1; R_n(1) = 0$. Найдем весовые коэффициенты энергетического фильтра и по ним определим пиковое и энергетическое отношения сигнал/помеха на выходе фильтра.

Составим матричное уравнение (7.18):

$$(h_0, h_1) \left[\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = (0, 0)$$

Определитель матрицы, заключенный в квадратные скобки, равен

$$D = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 3 \\ 3 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)^2 - 9.$$

Путем приравнивания определителя к нулю, получаем:

$$(10 - \lambda)^2 - 9 = 0; \quad (10 - \lambda) = \pm 3; \quad \lambda_1 = 13; \quad \lambda_2 = 7.$$

Подставим $\lambda_{\max} = 13$ в исходное уравнение $(h_0, h_1) \begin{bmatrix} 10 - 13 & 3 \\ 3 & 10 - 13 \end{bmatrix} = (0, 0)$, что

приводит к уравнениям:
$$\begin{aligned} -3h_0 + 3h_1 &= 0 \\ 3h_0 - 3h_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{т.е. } h_0 = h_1$$

Из нормировки весовых коэффициентов при $h^2 + h_1^2 = 1$, получаем $h_0 / \sqrt{h_0^2 + h_1^2} = 0,707; \quad h_1 / \sqrt{h_0^2 + h_1^2} = 0,707$.

Значения профильтрованного сигнала будут равны

$$y_0 = s_0 h_0 = 2,121; \quad y_1 = s_0 h_1 + s_1 h_0 = 2,828; \quad y_2 = s_1 h_1 = 0,707.$$

Рассчитаем пиковое и энергетическое отношения сигнал/помеха на выходе

$$\begin{aligned} \mu_{\text{вых}} &= \frac{(s_0 h_1 + s_1 h_0)^2}{R_n(0)R_h(0) + 2R_n(1)R_h(1)} = 8 & R_h(0) &= h_0^2 + h_1^2 = 1 \\ \text{фильтра:} & & R_h(1) &= h_0 h_1 = 0,5 \\ \rho_{\text{вых}} &= \frac{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2}{R_n(0)R_h(0) + 2R_n(1)R_h(1)} = 13 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\rho_{\text{вых}} = \lambda_{\text{max}}$, и энергетическое отношение больше пикового.

Задача нахождения весовой функции энергетического фильтра упрощается, если помеха является некоррелированной. Тогда уравнение (7.18) запишется, как $\vec{h}'[R_s - \lambda_{\text{max}} I] = \vec{0}'$. Это приводит к тому, что при слабых помехах вместо R_s можно использовать АКФ наблюдаемого поля, т.е. $\vec{h}'[R_f - \lambda_{\text{max}} I] = \vec{0}'$, т.е. весовая функция определяется без привлечения априорной информации о сигнале и помехи. Результаты выделения и оценки формы двух сигналов разной энергии с помощью энергетического фильтра приводятся на рис.7.2.

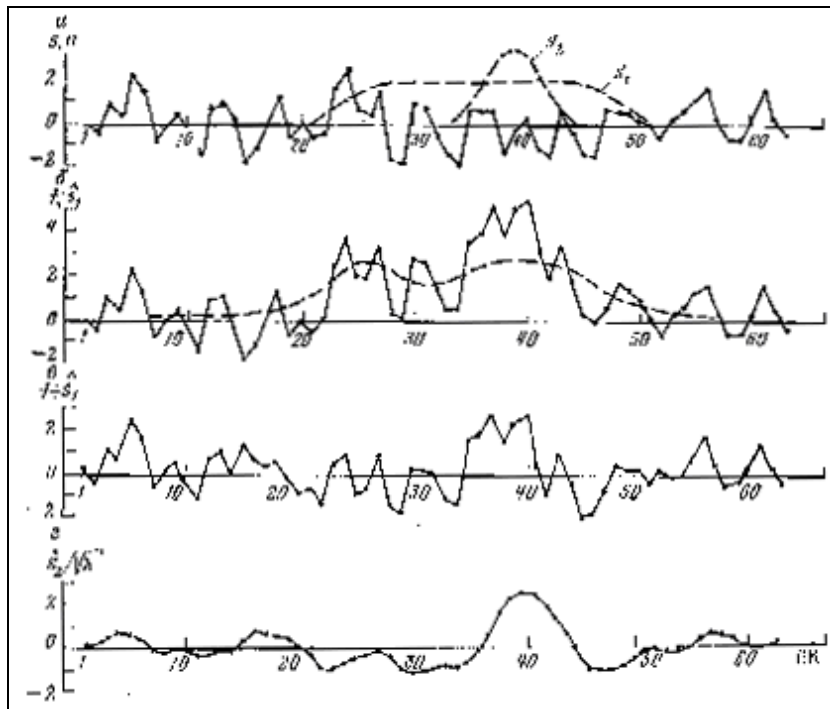


Рис.7.2. Результаты выделения и оценки формы двух сигналов разной энергии с помощью энергетического фильтра.

а - сигналы s_1 и s_2 с различной энергией и некоррелированная помеха, **б** - сигнал на входе фильтра, **в** - разность между входным сигналом и результатом фильтрации, **г** - результат энергетической фильтрации значения рис.в.

Относительно реализации оптимальных линейных фильтров следует сделать следующие замечания:

Замечание 1. Согласованный фильтр, обеспечивающий обнаружение заданного по форме сигнала, аналогичен вейвлет-анализу, в котором согласованная фильтрация осуществляется многократно для каждой копии порождающего вейвлета. Решение о наличии сигнала конкретной формы принимается по максимальной величине

выходного, т.е. профильтрованного сигнала. Разложение входного сигнала по всем копиям порождающего вейвлета аналогично Фурье-анализу, что позволяет рассчитать общую энергию (дисперсию) этих составляющих. Последнее обстоятельство используется при оценке AVO-эффекта, сопровождающего залежи углеводородов.

Замечание 2. Двумерные оптимальные фильтры реализуются как двумерные линейные фильтры, для которых весовые функции рассчитываются по блочным корреляционным матрицам. Построение этих матриц производится по двумерным АКФ сигнала и помех. $R_s(p, m)$ и $R_n(p, m)$.

Например, система уравнений двумерного согласованного фильтра для нахождения весовой функции h_{ki} будет записана в виде

$$\sum_{k=-p/2}^{p/2} \sum_{i=-M/2}^{M/2} h_{ki} R_n(p-k, m-i) = s(-p, -m).$$

Поскольку реализация двумерных оптимальных фильтров трудоемка даже для современных персональных компьютеров, то двумерную АКФ стараются представить в виде произведения одномерных АКФ, полученных отдельно по x и по y (по x и по t). Это позволяет двумерную фильтрацию свести к отдельно реализуемой фильтрации по координате x для каждого профиля и по координате y , т.е. между профилями.

Другое упрощение состоит в аппроксимации двумерных спектров сигналов и помех изотропными спектрами в предположении о центральной осевой симметрии исходного поля, т.е. когда можно осуществить замену ω_x и ω_y на частоту

$$\rho = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}.$$

Наконец, при некоррелированности помехи между профилями (трассами) осуществляется оптимальная фильтрация лишь по одной координате (x или по t), а затем по результатам фильтрации проводится суммирование в пределах скользящего окна, включающего N профилей (трасс) по заданному направлению сигнала.

Замечание 3. Трехмерные линейные неоптимальные и оптимальные фильтры приобретают в настоящее время все большее значение в связи с обработкой данных 3D-сейсморазведки и 3D-электроразведки. Для потенциальных полей трехмерные массивы данных образуются путем пересчета данных по площади в нижнее полупространство.

ГЛАВА VIII. ТЕОРИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБНАРУЖЕНИЯ СЛАБЫХ СИГНАЛОВ.

Развитие теории статистических решений для обработки данных обусловлено следующими причинами. Критерии оптимальной фильтрации и соответствующие им

алгоритмы обработки исходных данных обеспечивают выделение сигналов на фоне помех, однако принятие решения о наличии или отсутствии полезного сигнала после фильтрации осуществляется интерпретатором визуально. Это обстоятельство делает последний этап обработки весьма субъективным, особенно для случая обнаружения слабых сигналов. Под **слабым сигналом** понимается сигнал, соизмеримый по интенсивности с уровнем помех и ниже этого уровня. Визуальное обнаружение таких сигналов практически исключено. В то же время проблема обнаружения слабых сигналов в разведочной геофизике приобретает все большее значение в связи с поисками объектов, залегающих на больших глубинах, слабоконтрастных по физическим свойствам объектов, малоразмерных залежей углеводородов, а также объектов, аномальные эффекты от которых осложнены интенсивными помехами самой разной природы.

Получив в результате, например, согласованной фильтрации несколько положительных экстремумов, решение о наличии сигнала принимается лишь по максимальному из них. Относительно более слабых экстремумов решение о наличии сигнала принять трудно, поскольку в оптимальных фильтрах отсутствуют пороги принятия решения о наличии сигнала.

Вторая причина, по которой теория статистических решений получила развитие, связана с отсутствием общей теоремы, утверждающей, что максимальное отношение сигнал/помеха на выходе фильтра приводит к максимальному извлечению полезной информации. Под **максимальным извлечением полезной информации** в настоящее время принято понимать получение апостериорных вероятностей, в частности, для задачи обнаружения сигнала - апостериорных вероятностей наличия или отсутствия сигнала.

В теории статистических решений для решения задачи обнаружения используются те или иные критерии принятия статистических гипотез о наличии (отсутствии) сигнала, которые позволяют установить порог принятия решения о наличии сигнала, а также рассчитать апостериорные вероятности наличия сигнала. Оптимальная согласованная фильтрация при этом входит в качестве составной части алгоритмов теории статистических решений в задачах обнаружения слабых сигналов.

8.1. Основные понятия теории статистических решений.

Статистическое решение связано с понятием статистической гипотезы. При решении задачи обнаружения сигнала имеют место две статистические гипотезы:

- *гипотеза о наличии сигнала*, для которой наблюдаемые данные представляют сумму сигнала и помех $f_i = s_i + n_i$. Эту гипотезу называют ненулевой и обозначают как H_1 , т.е. $H_1 \Rightarrow f_i = s_i + n_i$;

- *гипотеза об отсутствии сигнала*, для которой наблюдаемые данные представлены только помехой, т.е. $f_i = n_i$. Это - нулевая гипотеза $H_0 \Rightarrow f_i = n_i$. Для каждой гипотезы по значениям f_i можно построить статистический аналог плотности распределения - гистограмму. Такие плотности распределений значений f_i называются **функциями правдоподобия** и обозначаются как $P(F/H_1)$ и $P(F/H_0)$, где $F = f_1, f_2, \dots, f_m$. Функции правдоподобия для задачи обнаружения сигнала приведены на рис.8.1.



При этом функция $P(F/H_0)$ соответствует оценке плотности распределения помех и в качестве гистограммы может быть построена на участках, на которых заведомо отсутствуют сигналы. Функция $P(F/H_1)$ будет смещена относительно $P(F/H_0)$ на величину a , как это показано на рис.8.1. Всю область наблюдаемых значений $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ можно разделить на две области s_0 и s_1 величиной h .

Область s_0 соответствует множеству значений f_i для гипотезы H_1 . Величина h на оси f_i , разделяющая эти области, называется **порогом принятия решения** о наличии той или иной гипотезы.

Принятие статистического решения о наличии сигнала не может быть безошибочным из-за осложнения сигнала помехами. При этом возникают ошибки двоякого рода.

Ошибка первого рода заключается в том, что принимается решение о наличии сигнала, т.е. о гипотезе H_1 , когда на самом деле сигнал отсутствует, т.е. выполняется гипотеза H_0 . Эта ошибка называется *ошибкой обнаружения ложного сигнала*. Она появляется тогда, когда наложение помех создает ситуацию, похожую на полезный сигнал.

Ошибка второго рода заключается в том, что принимается решение об отсутствии сигнала, т.е. о гипотезе H_0 , когда на самом деле сигнал имеется, т.е. выполняется гипотеза H_1 . Эта ошибка называется *ошибкой пропуска сигнала*. Она

появляется тогда, когда помехи настолько искажают сигнал, что создается ситуация, отвечающая только помехе.

С ошибками первого и второго рода связаны соответствующие им вероятности.

Вероятность ошибки I рода или вероятность ошибки обнаружения ложного сигнала равна

$$\alpha = \int_{S_1} P(F / H_0) dF = \int_{-\infty}^h P(F / H_0) dF \quad (8.1)$$

Вероятность ошибки II рода или вероятность пропуска сигнала равна

$$\beta = \int_{S_0} P(F / H_1) dF = \int_{-\infty}^h P(F / H_1) dF \quad (8.2)$$

Вероятности α и β соответствуют площадям, заштрихованным на рис. 8.1.

Если для гипотез H_0 и H_1 ввести их априорные вероятности p_0 и p_1 , то **общая безусловная вероятность ошибки**, связанная как с обнаружением ложного сигнала, так и с пропуском сигнала, будет равна

$$g = p_0 \alpha + p_1 \beta \quad (8.3)$$

Величина $\gamma = 1 - \beta$ называется **вероятностью правильного обнаружения сигнала** при его наличии или **надежного обнаружения сигнала**. Соответственно вероятность правильного необнаружения сигнала при его отсутствии равна $\phi = 1 - \alpha$.

При выборе порога h потери, обусловленные ошибками I и II рода, могут быть разными с точки зрения экономики. Если мы обнаруживаем ложный сигнал, то должны провести затраты на его проверку. В случае пропуска сигнала можно пропустить тот или иной важный объект поисков. Поэтому вводят цены для ошибок I и II рода - C_α и C_β .

Произведение $C_\alpha \cdot \alpha$ называют **риском** (или потерей), соответствующим гипотезе H_1 . **Средний риск** или функция потерь при принятии решения определяется выражением:

$$r(h) = p_0 C_\alpha \alpha + p_1 C_\beta \beta \quad (8.4),$$

в котором величина среднего риска зависит от значения порога h .

8.2. Критерии принятия статистических решений.

Естественный критерий принятия статистических решений связан с минимизацией среднего риска (8.4). Согласно критерию минимального риска, (он же

называется **критерием Байеса**) выбирается такое значение порога h_1 , которое обеспечивает минимум выражения (8.4).

Для нахождения пороговой величины h выражение (8.4) перепишем с учетом (8.1) и (8.2) и к нему добавим и вычтем одну и ту же величину, равную

$$\int_{s_1} C_{\beta} p_1 P(F / H_1) dF, \text{ т.е.}$$

$$r(h) = \int_{s_1} p_0 C_{\alpha} P(F / H_0) dF + \int_{s_0} p_1 C_{\beta} P(F / H_1) dF + \int_{s_1} C_{\beta} p_1 P(F / H_1) dF - \int_{s_1} C_{\beta} p_1 P(F / H_1) dF =$$

$$\int_{s=s_0+s_1} C_{\beta} p_1 P(F / H_1) dF + \int_{s_1} [C_{\gamma} p_0 P(F / H_0) - C_{\beta} p_1 P(F / H_1)] dF.$$

Поскольку в последнем выражении первый член равен $C_{\beta} p_1$, то для минимизации $r(h)$ нужно выбрать область s_1 таким образом, чтобы под интегральная функция второго члена была бы отрицательной. Это приводит к тому, что $C_{\alpha} p_1 P(F / H_0) < C_{\beta} p_1 P(F / H_1)$, или

$$\Lambda = \frac{P(F / H_1)}{P(F / H_0)} > \frac{C_{\alpha} p_0}{C_{\beta} p_1} = h \quad (8.5)$$

Отношение функций правдоподобия называют **коэффициентом правдоподобия** и обозначают его через Λ , для критерия минимального риска коэффициент правдоподобия в случае выполнения гипотезы H_1 , т.е. гипотезы о наличии сигнала, должен превосходить величину порога h , равную $C_{\alpha} p_0 / C_{\beta} p_1$. Таким образом, применение критерия минимального риска возможно лишь при заданных ценах C_{α} и C_{β} и априорных вероятностях гипотез p_0 и p_1 . Поскольку достоверная оценка C_{α} и C_{β} требует тщательного анализа большого статистического материала, который может быть получен лишь в районах с хорошей геолого-геофизической изученностью и экономических затрат на проверку ложных аномалий, то приходится считать, что $C_{\alpha} = C_{\beta}$. При этом минимизируется общая безусловная вероятность ошибки (8.3), что приводит к **критерию Котельникова** (или критерию идеального наблюдателя), определяющего порог принятия решения в виде:

$$\Lambda > \frac{p_0}{p_1} = h \quad (8.6).$$

Если также принять априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала равными ($p_0 = p_1$), что отвечает максимальной неопределенности гипотез H_0 и H_1 , то порог принятия решения будет равен единице, т.е.

$$\Lambda > 1 = h \quad (8.7)$$

Что соответствует критерию максимального правдоподобия. Действительно, если найдены значения вероятностей $P(F/H_1)$ и $P(F/H_0)$, то решение о наличии сигнала следует принять при $P(F/H_1) > P(F/H_0)$, что и приводит к выражению (8.7).

Критерий Котельникова, при заданных p_0 и p_1 , позволяет на основе формулы Байеса оценить апостериорную вероятность наличия сигнала:

$$P(H_1/F) = \frac{p_1 P(F/H_1)}{p_1 P(F/H_1) + p_0 P(F/H_0)} = \frac{(p_1/p_0)\Lambda}{(p_1/p_0)\Lambda + 1}$$

Решение о наличии сигнала принимается при максимальной величине $P(H_1/F)$. Такой критерий называется *критерием максимума апостериорной вероятности*. Очевидно, что при $p_0=p_1$, критерий максимума апостериорной вероятности приводит к пороговой величине $P(H_1/F)$, равной 0,5, т.е. при $p_0=p_1$, $\Lambda = 1$ и $P(H_1/F) = \frac{\Lambda}{\Lambda + 1} > 0,5$ для гипотезы H_1 .

Правило принятия решения при отсутствии сведений об априорных вероятностях приводит к *критерию Неймана-Пирсона*. Согласно этому критерию минимизируется величина β при условии задания вероятности обнаружения ложного сигнала α_0 , т.е. при $\alpha = \alpha_0$, $\min \beta$.

Очевидно, что при заданной вероятности ошибки I рода и найденной функции правдоподобия $P(F/H_0)$ нетрудно найти порог принятия решения h из выражения

$$\int_h^\infty P(F/H_0) dF = \alpha_0.$$

При обработке геофизических данных с целью обнаружения слабых сигналов наибольшее применение нашли три критерия: критерий максимального правдоподобия, критерий максимума апостериорной вероятности и критерий Неймана-Пирсона.

Кроме перечисленных критериев известны также критерий минимакса, при котором порог h находится при минимизации максимально возможного риска, критерий Вальда (или критерий последовательного анализа), при котором задаются вероятности α и β , что приводит к двум пороговым величинам Λ_1 и Λ_2 и решение о наличии сигнала принимается при $\Lambda_1 > \frac{1-\beta}{\alpha} > 1$.

Критерий минимакса является достаточно грубым в том смысле, что принятие решения о наличии сигнала можно принимать просто визуально, а критерий Вальда требует непрерывного расчета пороговых величин Λ_1 и Λ_2 при каждом новом измеренном значении поля.

8.3. Коэффициент правдоподобия и вероятности ошибок I и II рода.

Коэффициент правдоподобия определяется через функции правдоподобия. Посредством коэффициента правдоподобия вычисляются вероятности ошибок обнаружения ложного сигнала и пропуска сигнала, а также важная характеристика надежности обнаружения сигнала. Кроме того, коэффициент правдоподобия лежит в основе одного из способов обнаружения слабых сигналов – способа обратных вероятностей.

Нахождение коэффициента правдоподобия обычно проводится для нормально распределенной помехи. Согласно центральной предельной теоремы сумма произвольно распределенных случайных величин, при их числе более девяти, распределена нормально, т.е. свертка, представляющая сумму произведения исходных данных, как случайных величин, на весовые коэффициенты, имеет также нормальное распределение. Это обстоятельство при расчете коэффициента правдоподобия имеет принципиальное значение.

Найдем выражение для коэффициента правдоподобия, полагая распределение некоррелированной помехи нормальным с нулевым средним и дисперсией σ^2 , а сигнал заданным по форме. При этом получим следующие выражения для функций правдоподобия: $P(F/H_0)$ и $P(F/H_1)$, учитывая, что гипотеза H_0 состоит в том, что $f_i \equiv n_i$, а гипотеза $H_1 \Rightarrow f_i = s_i + n_i$ ($i = 1, \dots, m$).

$$P(F/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{f_1^2}{2\sigma^2}\right) \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{f_m^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \sigma^m} \exp\left(-\sum_1^m f_i^2 / 2\sigma^2\right).$$

Поскольку $f_i - s_i = n_i$, то

$$P(F/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(f_1 - s_1)^2}{2\sigma^2}\right) \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(f_m - s_m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m \sigma^m} \exp\left(-\sum_1^m (f_i - s_i)^2 / 2\sigma^2\right).$$

Соответственно, коэффициент правдоподобия будет равен

$$\Lambda = \frac{P(F/H_1)}{P(F/H_0)} \exp\left(-\frac{\sum s_i^2}{2\sigma^2} + \frac{\sum s_i f_i}{\sigma^2}\right) \quad (8.7),$$

где первый член под экспонентой $\rho = \sum s_i^2 / \sigma^2$ определяет энергетическое отношение сигнал/помеха для некоррелированной помехи, а второй член $\varphi = \frac{1}{\sigma^2} \sum f_i s_i$ - есть корреляционная сумма сигнала с исходными значениями поля.

Согласно приведенным выше критериям решение о наличии сигнала принимается при $\Lambda > \Lambda_0 = h$. Тогда, прологарифмировав выражение (8.7), получаем

$$\varphi = \frac{1}{\sigma^2} \sum f_i s_i > \ln \Lambda_0 + \rho / 2.$$

Вероятность ошибки обнаружения ложного сигнала α - это вероятность того, что при отсутствии сигнала величина φ окажется больше порога Λ_0 и будет принято неправильное решение о наличии сигнала, т.е. при $f_i = n_i$, $\varphi = \frac{1}{\sigma^2} \sum f_i s_i > \ln \Lambda_0 + \rho / 2$.

Иначе для вычисления вероятности α надо определить вероятность последнего неравенства. Поскольку помеха n_i - некоррелирована и имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ^2 , величина φ будет нормально распределена со средним $\varphi = 0$ и дисперсией $D\varphi = \rho$.

Следовательно, вероятность ошибки I рода с

$$\alpha = \int_{\varphi_{\text{пор}}}^{\infty} P(\varphi / H_0) d\varphi = \int_{\ln \Lambda_0 + \rho / 2}^{\infty} P(\varphi / H_0) d\varphi = 1 - \Phi\left(\frac{\ln \Lambda_0 + \rho / 2}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (8.8),$$

где $\Phi\left(\frac{\ln \Lambda_0 + \rho / 2}{\sqrt{\rho}}\right)$ - интеграл вероятности: $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx$, нормировка в (8.8)

на величину $\sqrt{\rho}$ необходима для приведения φ к единичной дисперсии.

Аналогично находим вероятность ошибки пропуска сигнала β . При этом величина φ будет меньше порога Λ_0 , несмотря на наличие сигнала, т.е. при $f_i = s_i + n_i$

$\varphi = \frac{1}{\sigma^2} \sum (s_i + n_i) s_i < \ln \Lambda_0 + \rho / 2$, причем среднее значение $\bar{\varphi} = \rho$ и $D\varphi = \rho$.

Вероятность ошибки II рода

$$\beta = \int_{-\infty}^{\varphi_{\text{пор}}} P(\varphi / H_1) d\varphi = \int_{-\infty}^{\ln \Lambda_0 + \rho / 2} P(\varphi / H_1) d\varphi = \Phi\left(\frac{\ln \Lambda_0 - \rho / 2}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (8.9)$$

В выражении (8.9) учтено приведение распределения φ в интеграле вероятности к нулевому среднему и единичной дисперсии, т.е. следует из $\ln \Lambda_0 + \rho / 2$ вычесть среднее значение, равное ρ и произвести нормировку на $\sqrt{\rho}$.

Для критерия максимального правдоподобия порог $\Lambda_0 = 1$ и из выражений (8.8) и (8.9) следует, что $\alpha = \beta = 1 - \Phi(\sqrt{\rho} / 2)$.

Для критерия Неймана-Пирсона порог принятия решения Λ_0 находится при заданных значениях α_0 и ρ , а именно: $(\ln \Lambda_0 + \rho/2)/\sqrt{\rho} = 1 - \alpha_0$. Если $\alpha_0 = 5\%$, то $\ln \Lambda_0 = 0,95\sqrt{\rho} - \rho/2$.

8.4. Надежность обнаружения сигнала и ее применение.

Надежность обнаружения сигнала γ определяется как вероятность правильного обнаружения сигнала при его наличии и равна $\gamma = 1 - \beta = 1 - \Phi\left(\frac{\ln \Lambda_0 - \rho/2}{\sqrt{\rho}}\right)$.

Для критерия максимального правдоподобия, т.е. когда порог $\Lambda_0 = 1$, надежность обнаружения будет

$$\gamma = \Phi\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right) \quad (8.10),$$

где $\rho = \sum s_i^2 / \sigma^2 = \frac{ms^{-2}}{\sigma^2}$ - энергетическое отношение сигнал/помеха, а $\Phi\left(\frac{\sqrt{\rho}}{2}\right)$ - интеграл вероятности.



Характеристики обнаружения сигнала, представляющие зависимости между надежностью обнаружения γ и энергетическим отношением для критерия максимального правдоподобия (8.10) и для критерия Неймана-Пирсона при заданных величинах α_0 и ρ приведены на рис.8.2. Характеристики обнаружения

сигнала иллюстрируют тот факт, что для достижения большей надежности требуется и большее отношение сигнал/помеха. Это достаточно известный факт здесь описывается количественной зависимостью величины γ от ρ .

Характеристики обнаружения позволяют еще до начала обработки оценить возможность выявления тех или иных сигналов (аномалий). Например, надежность

обнаружения сигнала, соизмеримого с уровнем помех, т.е. $\bar{s}^2 = \sigma^2$ при 10 аномальных значениях по критерию максимального правдоподобия равна 95%, т.к. $\rho = m\bar{s}^2 / \sigma^2 = 10$. Для критерия Неймана-Пирсона при одном и том же отношении ρ обнаружение характеризуется разной надежностью в зависимости от заданной величины α_0 , как это показано на рис.8.2.

Выражения (8.8), (8.9) и (8.10) справедливы для случая обнаружения сигнала на фоне некоррелированной помехи. При коррелированной помехе энергетическое отношение сигнал/помеха определяется соотношением:

$$\rho = \bar{s}' R_n^{-1} \bar{s} \quad (8.11)$$

, где $\bar{s}'$ и $\bar{s}$ - вектор-строка и вектор-столбец значений сигнала, R_n^{-1} - обратная корреляционная матрица помехи. Корреляционная матрица помехи R_n строится по АКФ помехи. Таким образом, одно из применений надежности обнаружения сигнала состоит в оценке качества выявляемых аномальных эффектов.

Заметим, что если форма сигнала неизвестна, то оценка энергетического отношения сигнал/помеха, а, следовательно, и надежность обнаружения сигнала, может быть проведена непосредственно по исходным значениям поля с использованием ВКФ и интервала корреляции, рассчитанного по АКФ. По функциям взаимной корреляции в предположении коррелированности сигнала от профиля к профилю (от трассы к трассе) рассчитывается величина $\bar{s}^2 / \sigma^2 = B_H(m_s) / [1 - B_H(m_s)]$, где $B_H(m_s)$ - значение положительного экстремума ВКФ. Протяженность сигнала m оценивается по величине интервала корреляции, определяемого по АКФ. Следовательно, энергетическое отношение сигнал/помеха $\rho = m\bar{s}^2 / \sigma^2$. Эта оценка ρ является усредненной для некоторого среднестатистического сигнала, тем не менее, она позволяет до начала обработки или после обработки определить надежность обнаружения сигнала.

Другим практическим приложением надежности обнаружения является четкое определение понятия *достоверная геофизическая аномалия* или достоверный сигнал. Так, согласно действующим инструкциям по магнито-, электро- и гравиразведке, под аномалией (достоверной) понимается совокупность не менее трех точек со значениями поля, превышающими тройную среднеквадратическую погрешность наблюдений σ , т.е. когда $m=3$; $\bar{s}^2 / \sigma^2 = 3$. При этом определении величина энергетического отношения сигнал/помеха будет равна $\rho = m\bar{s}^2 / \sigma^2 = 3 \cdot 9 = 27$. По критерию максимального правдоподобия надежность обнаружения сигнала при $\rho=27$ $\gamma > 99,5\%$. Из тех же соображений аномалия с отношением $\bar{s} / \sigma = 1$ будет достоверной при $m \geq 27$.

Интуитивно предполагая наличие связи с надежностью обнаружения сигнала и числом его аномальных значений на практике сгущают сеть наблюдений с целью увеличения достоверности обнаружения сигнала. При этом интерпретаторы пренебрегают условием о наличии трех точек со значениями поля, большими 3σ , когда речь идет о выделении протяженных слабопроявленных аномалий и, как следует, из приведенных выше расчетов надежности обнаружения такой подход является вполне оправданным.

При проведении радиометрической съемки за аномалию, согласно инструкции по пешеходной гамма-съемке, принимается лишь одна точка ($m=1$) со значениями естественной радиоактивности $\bar{s} / \sigma_\phi = 2(\bar{s}^2 / \sigma^2 = 4)$, где σ_ϕ - среднеквадратический уровень фона пород. При этом надежность ее обнаружения по формуле (8.10) равна 84%. Следовательно, в определении понятия достоверная аномалия необходимо объединить разные подходы, что можно осуществить на базе надежности обнаружения сигнала (8.10), а именно: «под достоверной аномалией следует понимать такую составляющую поля, отношение энергии которой к мощности помех (в частности, к дисперсии помех) σ^2 превосходит порог, соответствующий заданной вероятности, т.е. надежности обнаружения γ ».

Следующим практическим приложением надежности обнаружения сигнала является возможность получения объективного критерия для выбора параметров геофизической съемки (шага съемки).

Из выражения (8.10) следует, что

$$\bar{s} / \sigma = \frac{2}{\sqrt{m}} \Phi^{-1}(\gamma) \quad (8.12)$$

где $\Phi^{-1}(\gamma)$ - аргумент интеграла вероятности. Тогда, задавая величину надежности обнаружения сигнала γ от интересующего нас объекта из выражения (8.12) можно найти число характеризующих наблюдений для сигнала m , что приводит к необходимому значению шага съемки. При этом величина $\bar{s} / \sigma$ оценивается предварительно путем решения прямой задачи, либо по функциям взаимной корреляции данных, полученных при опытно-методических работах. Отметим, что при одном и том же отношении $\bar{s} / \sigma$ для увеличения надежности обнаружения сигнала γ требуется большее число наблюденных его значений, и такая зависимость выражена количественно.

При всех выводах, которые следовали из анализа надежности обнаружения сигнала, мы исходили из предположения отсутствия корреляции помехи. Только при этом надежность обнаружения растет пропорционально увеличению числа аномальных

значений поля, поскольку $\rho = (\bar{s}^2 / \sigma^2) m$, т.е. на определенной стадии детализации аномалии, увеличение числа m не будет приводить к увеличению ρ , поскольку уменьшение шага съемки (увеличение числа m на одном и том же интервале) приведет в конечном итоге к коррелированности помех, обусловленной в частности, эффектами от поверхностных неоднородностей.

Влияние коррелированности помех проиллюстрируем на примере АКФ помехи треугольного типа, для которой дисперсия коррелированной помехи определяется соотношением $\sigma_{кор}^2 = r_x \sigma^2$, где σ^2 - дисперсия некоррелированной помехи, а r - интервал корреляции помехи по профилю. Следовательно, энергетическое отношение сигнал/помехи $\rho = \bar{s}^2 m / \sigma^2 r_x$. При этом сгущение сети путем увеличения m будет скомпенсировано возрастанием величины интеграла корреляции помехи r_x , и выигрыша в увеличении энергетического отношения не будет.

Однако, остается еще путь повышения надежности обнаружения сигнала за счет увеличения числа независимых его наблюдений по нескольким профилям. Тогда энергетическое отношение $\rho = \bar{s}^2 m N / \sigma^2 r_x$, где число N - число профилей, по которым прослеживается сигнал.

В то же время вновь на определенном этапе сгущения сети профилей возникнет корреляция помехи уже между профилями, т.е. увеличение числа независимых наблюдений сигнала за счет увеличения числа профилей N будет скомпенсировано ростом интервала корреляции помехи между профилями r_y .

Наконец, увеличение надежности обнаружения сигнала может быть достигнуто путем использования данных комплекса геофизических методов. Если для каждого независимого физического поля сигнал обусловлен одним и тем же геологическим объектом, надежность обнаружения определяется выражением $\gamma = \Phi \left(\sqrt{\sum_1^L \rho_l} / 2 \right)$, где ρ_l - отношение сигнал/помеха для l -го поля, $l=1, \dots, L$ - число полей или число независимых между собой атрибутов одного и того же поля.

8.4. Способ обратных вероятностей.

Способ обратных вероятностей предназначен для обнаружения слабых сигналов известной формы. В отличие от согласованного фильтра, также реализующего обнаружение заданных по форме сигналов, он включает порог принятия решения о наличии сигнала и вычисление апостериорных (обратных) вероятностей наличия

сигнала по формуле Байеса, известной как формула обратных вероятностей. Это и определило название способа, впервые для решения задач разведочной геофизики, предложенного А.Г.Тарховым в 1959 г.

В связи с развитием вейвлет-анализа применение способа обратных вероятностей приобретает особое значение.

Рассмотрим обнаружение заданного по форме сигнала на фоне некоррелированной помехи с позиции теории статистических решений.

1. Постановка задачи и модель поля.

Задача обработки состоит в обнаружении сигнала, соизмеримого с уровнем помех или ниже этого уровня. Модель поля f_i представляет сумму сигнала s_i и помехи n_i . Форма сигнала считается заданной, помеха предполагается в виде стационарного случайного процесса, некоррелированной и нормально распределенной с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Требуется по последовательности измеренных значений поля $F = (f_1, \dots, f_m)$ с определенной вероятностью установить, является ли та последовательность суммой сигнала и помехи, или она представлена лишь одной помехой, что приводит к сравнению двух гипотез $H_1 \Rightarrow f_i = s_i + n_i$ и $H_0 \Rightarrow f_i = n_i$.

2. Оценка формы сигнала и свойств помехи.

Форма сигнала может быть получена либо путем решения прямой задачи для выбранной физико-геологической модели искомого объекта и вмещающей среды, либо просто по наблюдаемым визуальным сигналам на соседних или сходных по геологическому строению объектах. Оценка корреляционных свойств помехи осуществляется на заведомо безаномальных участках съемки путем расчета АКФ, на основе которой делается вывод о некоррелируемом или коррелируемом характере помехи с определением ее дисперсии σ^2 .

3. Выбор критерия принятия решения о наличии сигнала.

Для обнаружения заданного по форме сигнала наиболее предпочтителен критерий максимального правдоподобия, при котором априорные вероятности наличия и отсутствия сигнала равны по 0,5. Согласно этому критерию задача обнаружения сигнала будет сведена к расчету коэффициента правдоподобия $\Lambda = P(F / H_1) / P(F / H_0)$ и его сравнению с порогом Λ_0 , равным единице. При $\Lambda_0 > 1$ принимается решение о наличии сигнала. От коэффициента правдоподобия с использованием формулы Байеса легко перейти к вычислению апостериорной вероятности гипотезы о наличии сигнала, т.е. от условной вероятности $P(F / H_1)$ к условной (апостериорной) вероятности $P(H_1 / F)$, т.е. к обратной вероятности, а именно:

$$P(H_1 / F) = \Lambda / (\Lambda + 1) \quad (8.13)$$

С учетом критерия максимального правдоподобия при пороге принятия решения $\Lambda_0 = 1$, получаем правило (критерий) принятия решения о наличии сигнала по величине апостериорной вероятности (критерий максимума апостериорной вероятности) $P(H_1 / F) > 0,5$ - есть сигнал. При $P(H_1 / F) \leq 0,5$ принимается решение об отсутствии сигнала.

4. Алгоритм обнаружения сигнала.

Для случая некоррелированной помехи, нормально распределенной с нулевым средним и дисперсией σ^2 , в разделе 8.2 было получено выражение для коэффициента правдоподобия в виде

$$\Lambda = \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum s_i^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum s_i f_{j-i} \right) \quad (8.14),$$

где индекс j характеризует смещение сигнала вдоль профиля от точки к точке.

Решение о наличии сигнала при этом принимается по величине апостериорной вероятности

$$P_j(H_1 / F) = \Lambda_j / (\Lambda_j + 1) > 0,5 \quad (8.15).$$

Выражение (8.14) и (8.15) и представляют алгоритм способа обратных вероятностей.

В (8.14) первый член под знаком экспоненты определяет энергетическое отношение сигнал/помеха $\rho = \sum s_i^2 / \sigma^2$, и при вычислениях он остается неизменным, а второй член является сверткой, обеспечивающей реализацию согласованного фильтра, т.е. процесс обнаружения по критерию максимума пикового отношения сигнал/помеха. Весовой функцией при обнаружении служат ординаты сигнала, нормированные на дисперсию помехи $h_i = s_i / \sigma^2$. В качестве примера реализации вычислений по формулам (8.14) и (8.15) рассмотрим обнаружение сигнала, заданного ординатами $s_i = 1, 2, 4, 2, 1$ в числовом поле из двенадцати значений $f_i = -2, -2, 0, 2, -1, 3, 2, 1, -2, 0, 1, -2$. Среднее значение $\bar{f} = 0$, дисперсия $\sigma^2 = 3$. Ни одно из приведенных значений сигнала не превосходит тройную погрешность наблюдений $\sigma = \sqrt{3} = 1,7$, а дисперсия сигнала $\bar{s}^2 = \sum s_i^2 / 5 \approx 5$ не превосходит даже двойную величину σ^2 .

Энергетическое отношение сигнал/помеха равно $\rho = \sum s_i^2 / \sigma^2 = 26/3 = 8,67$, что соответствует достаточно высокой надежности обнаружения такого сигнала по критерию максимального правдоподобия, равной 93%.

Нахождение результатов свертки в (8.14) осуществляется как $\sum_3 = f_1 s_1 + f_2 s_2 + f_3 s_3 + f_4 s_4 + f_5 s_5$; $\sum_4 = f_2 s_1 + f_3 s_2 + f_4 s_3 + f_5 s_4 + f_6 s_5$ и т.д., где получаемые суммы относятся к центральной точке перемещаемого сигнала.

Расчеты по формулам (8.14) и (8.15) можно свести к таблице 1, в которой последний столбец оценивает апостериорные вероятности наличия сигнала. Решение о наличии сигнала принимается лишь для точки с номером 6, в которой величина апостериорной вероятности $P_j(H_1/F) = 0,8$, т.е. она больше порогового значения, равного 0,5.

Таблица 1.

№ точки	$\sum_j$	$\varphi_j = \frac{\sum_j}{\sigma^2}$	$-\rho/2 + \varphi_j$	$\Lambda_j = \exp(-\rho/2 + \varphi_j)$	$P_j = \frac{\Lambda_j}{\Lambda_j + 1}$
3	-3	-1.00	-5.34	0	0
4	7	2.33	-2.01	0.13	0.12
5	7	2.33	-2.01	0.13	0.12
6	17	5.67	1.33	3.78	0.80
7	13	4.33	-0.01	0.99	0.50
8	7	2.33	-2.01	0.13	0.12
9	-3	-1.00	-5.34	0	0
10	-3	-1.00	-5.34	0	0

Обнаружение сигнала на фоне коррелированных помех включает те же самые процедуры вычислений. Отличие состоит в том, что вместо величины σ^2 для помехи следует рассчитать корреляционную матрицу помехи R_n по ее АКФ. Алгоритм обнаружения при этом сводится к вычислению коэффициента правдоподобия

$$\Lambda_j = \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{s}_i' R_n^{-1} \bar{s} + \sum h_i f_{j-i}\right) \quad (8.16).$$

где весовые коэффициенты h_i являются решением системы линейных уравнений $\sum h_i R_n(m-i) = s(-m)$, т.е. определяются аналогично согласованному фильтру.

Способ обратных вероятностей эффективен при обнаружении сигналов, соизмеримых с уровнем помех, при достаточной их протяженности по профилю $m \geq 10$ и лишь для случая некоррелированной помехи. Для более слабых сигналов следует привлекать способы межпрофильной и самонастраивающейся фильтрации.

8.5. Способ межпрофильной корреляции.

Данные наблюдений по площади приводят к увеличению информации о полезных сигналах при их корреляции по нескольким профилям и вследствие этого расширяют возможности обнаружения слабых сигналов. Кроме того, при площадных

съемках появляется возможность решения принципиально новой задачи по разделению интерферирующих между собой аномалий. т.е. когда аномальные эффекты от объектов различного простирания (например. контакты пород и тектонические нарушения) накладываются друг на друга и наблюдаемые поля приобретают сложный интерференционный характер. Накопление аномальных эффектов за счет суммирования данных по определенному направлению позволяет обнаруживать и выделять сигналы даже при отсутствии сведений об их форме.

Как следует из анализа надежности обнаружения сигнала, повышение его надежности связано с увеличением независимых наблюдений сигнала за счет числа профилей N , по которым этот сигнал прослеживается.

Алгоритм способа межпрофильной корреляции сигнала вытекает из решения задачи обнаружения заданного по форме сигнала, прослеживаемого по N -профилям. на фоне некоррелированных между ними помех с нулевым средним и дисперсией σ^2 .

При такой постановке задачи коэффициент правдоподобия будет равен

$$\Lambda_{p,j} = \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m s_{ki}^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_k \sum_i s_{k-i} f_{p-k,j-i} \right) \quad (8.17)$$

где s_{ki} - заданный по форме сигнал, протяженностью m точек вдоль профилей и коррелируемый по N -профилям, f_{ki} - исходные значения поля в i -той точке, k -того профиля. Индексы p и j определяют смещение двумерного сигнала s_{ki} соответственно между профилями и вдоль профилей.

Первый член под знаком экспоненты определяет энергетическое отношение сигнал/помеха в окне, содержащем mN точек, второй член – представляет двумерную свертку, обеспечивающую фильтрацию данных с заданным по форме двумерным сигналом s_{ki} .

Из выражения (8.17) можно извлечь алгоритм обработки при отсутствии сведений о форме сигнала. Действительно. если двумерную свертку в (8.17) записать в виде $\varphi_{p,j} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m s_{ki} \sum_{k=1}^N f_{p-k,m-i}$. то при отсутствии информации о форме сигнала можно ограничиться лишь результатом суммирования данных по N -профилям. т.е. нахождением суммы $\varphi'_{p,j} = \sum_1^N f_{p-k,j-i}$. Последняя сумма отражает межпрофильное суммирование исходных данных и обеспечивает оценку формы сигнала, если помеха некоррелирована. При таком суммировании отношение сигнал/помехи возрастает в $\sqrt{N}$ раз, причем такой выигрыш достигается лишь при суммировании в направлении

корреляции сигнала (простирации сигнала). Величина смещения сигнала от профиля к профилю определяется по положительному экстремуму ВКФ для данных соседних пар профилей.

В соответствии с изложенным, обработка данных по способу межпрофильной корреляции включает следующие процедуры:

- расчет нормированных ВКФ для данных соседних пар профилей;
- оценка простирации сигнала по величине абсциссы положительного экстремума ВКФ;
- задание направления суммирования и выбор базы суммирования из N -профилей.

Вычисление нормированных ВКФ дает возможность оценить отношение сигнал/помеха по значению положительного экстремума ВКФ $B_H(l_s): \frac{\bar{s}^2}{\sigma^2} = \frac{B_H(l_s)}{1 - B_H(l_s)}$.

что позволяет определить базу суммирования N исходя из заданной надежности обнаружения сигнала $\gamma = \Phi\left(\frac{\sqrt{N\rho}}{2}\right)$. Так, при $\bar{s}^2 / \sigma^2 = 1$. ($B_H(l_s) = 0,5$) обычно

$m \geq 5$ ($\rho = 5$) и при базе $N=3$ обеспечивается надежность обнаружения $\gamma \geq 97\%$. ($N\rho = 15$). При $\bar{s}^2 / \sigma^2 < 1$, когда ($B_H(l_s) = 0,3 \div 0,4$). $N \geq 5 \div 7$:

-скользящее суммирование исходных данных по каждому заданному направлению суммирования в пределах N -профилей съемки. Результаты суммирования относятся к среднему из суммируемых профилей;

-выделение сигналов и аномальных зон по коррелируемым особенностям суммарного поля.

При этом надежно выделяемыми сигналами следует считать лишь те, которые коррелируются по числу профилей, превышающему базу суммирования. Заметим, что изложенный алгоритм аналогичен методам общей глубинной точки и регулируемого направленного приема (РНП) в сейсморазведке. В первом из них направление суммирования задается с учетом известной скоростной характеристики разреза конечным, во втором осуществляется перебор по различным значениям кажущейся скорости.

Результаты обработки данных магнитного поля способом межпрофильной корреляции приведены на рис.8.3, на котором иллюстрируется разделение аномалий по двум направлениям их простираций.

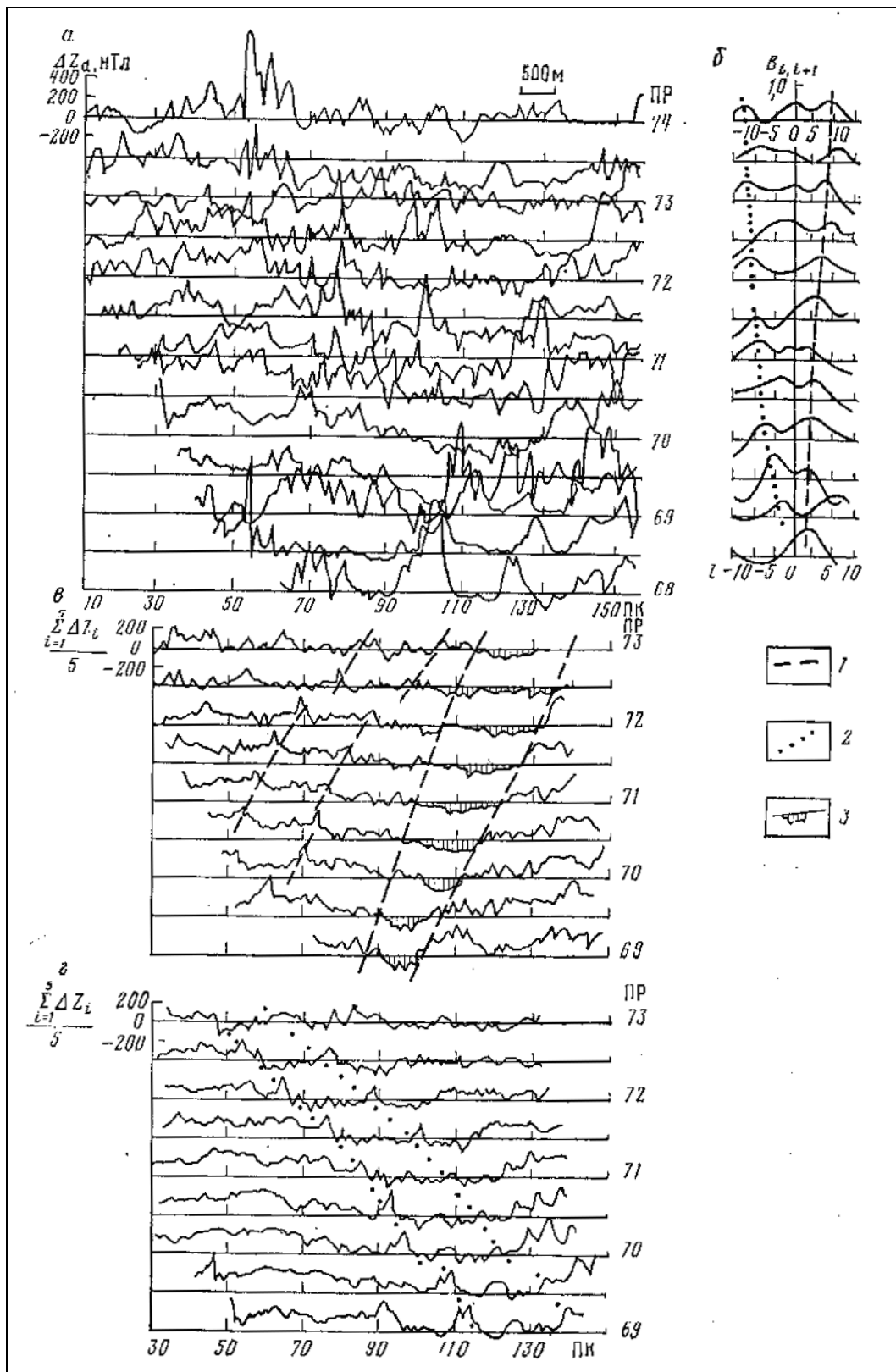


Рис.8.3. Разделение аномалий по двум направлениям их простираний с использованием метода межпрофильной корреляции.

a - исходные данные, *б* - функция взаимной корреляции между соседними профилями, *в* - результат суммирования по пяти профилям (северо-восточное простирание), *г* - результат суммирования по пяти профилям (северо-западное простирание).

8.6. Способ самонастраивающейся фильтрации.

Рассмотренный выше способ межпрофильной корреляции эффективен в тех случаях, когда по площади фиксируется несколько слабых сигналов одного и того же простираения, что обеспечивает надежную оценку положительного экстремума ВКФ. Однако, при этом слабые сигналы, отмечающиеся по простираению от серии сигналов одного и того же направления или от сильных, визуально выделяемых сигналов, не будут выявлены. Одним из эффективных приемов обнаружения слабых сигналов при минимуме априорной информации об их форме в общем случае является способ самонастраивающейся фильтрации. Под *самонастройкой* (адаптацией) понимается приспособляемость алгоритма обработки к изменению свойств сигнала (его формы и параметров) и помех, в частности, к изменению дисперсии помех.

Оценка этих свойств производится непосредственно в процессе обработки данных. При использовании самонастраивающихся процедур обработки основное значение при принятии решения о наличии сигнала приобретают критерии многомерного дисперсионного анализа. Рассмотрим применение одного из таких критериев (критерий или статистика Хоттелинта), содержащего алгоритм решения задачи как обнаружения сигнала на фоне некоррелированных помех, так и разделения сигналов по различным направлениям.

Принципиальным в данном алгоритме является задание размеров скользящего окна, содержащего N профилей по m точек в каждом из профилей. Размеры такого окна можно оценить по контуру значимой изолинии, равной обычно $0,1 \div 0,2$ двумерной автокорреляционной функции. Направление простираения сигналов определяется наклоном окна, который задается величиной смещения окна θ к простираению профилей на один, два и т.д. пикета последующего профиля относительно предыдущего. Обычно достаточно принять значение θ , равным $0; \pm 2\Delta; \pm 5\Delta$, поскольку направление профилей перпендикулярно к простираению искомым объектов. В ином случае сеть профилей следует повернуть на 90° .

В пределах скользящего окна, содержащего mN точек, оценивается форма сигнала непосредственно по наблюдаемым значениям поля путем их суммирования по N -профилям. т.е. $\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_1^N f_{ki}$. где f_{ki} - значение поля в i -той точке k -го профиля.

По полученной оценке формы сигнала $\bar{S}_i$ рассчитывается дисперсия сигнала

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{N} \sum_1^N f_{ki} \right)^2 \quad (8.18)$$

Для оценки дисперсии некоррелированной помехи следует из наблюдаемых значений поля f_{ki} вычесть полученную оценку формы сигнала по каждому профилю и затем рассчитать дисперсию найденного результата, т.е.

$$\sigma^2 = \frac{1}{mN} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \left[f_{ki} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{ki} \right]^2 \quad (8.19)$$

Отношение дисперсии сигнала (8.18) к дисперсии помех (8.19) определяет непосредственно алгоритм самонастраивающейся фильтрации в виде

$$\mu = \frac{\bar{s}^2}{\sigma^2} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_{ki} \right)^2}{\frac{1}{mN} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \left(f_{ki} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_{ki} \right)^2} \quad (8.20)$$

В этом алгоритме величина отношения сигнал/помеха получена лишь по наблюдаемым значениям поля без привлечения априорных сведений о форме сигнала и дисперсии помех.

Далее путем перемещения окна вдоль и вкрест простираения профилей реализуется оценка отношения сигнал/помеха по всей площади съемки.

Решение о наличии сигнала принимается при значении $\bar{s}^2 / \sigma^2$, большем пороговой величины $\mu_{пор.}$. Величина $\mu_{пор.}$ определяется при заданной вероятности ошибки I рода для центрального $F(0, q_1, q_2)$ распределения с $q_1 = m$ и $q_2 = m(N-1)$ - степенями свободы. Центральное F -распределение соответствует критерию Фишера в многомерном дисперсионном анализе. Этому распределению подчинена статистика Хоттелинта, отличающаяся от выражения (8.20) лишь на множитель N . В таблице 2 для $\alpha = 5\%$ приведены пороговые значения d для статистики Хоттелинга при некоторых m и N .

Таблица 2.

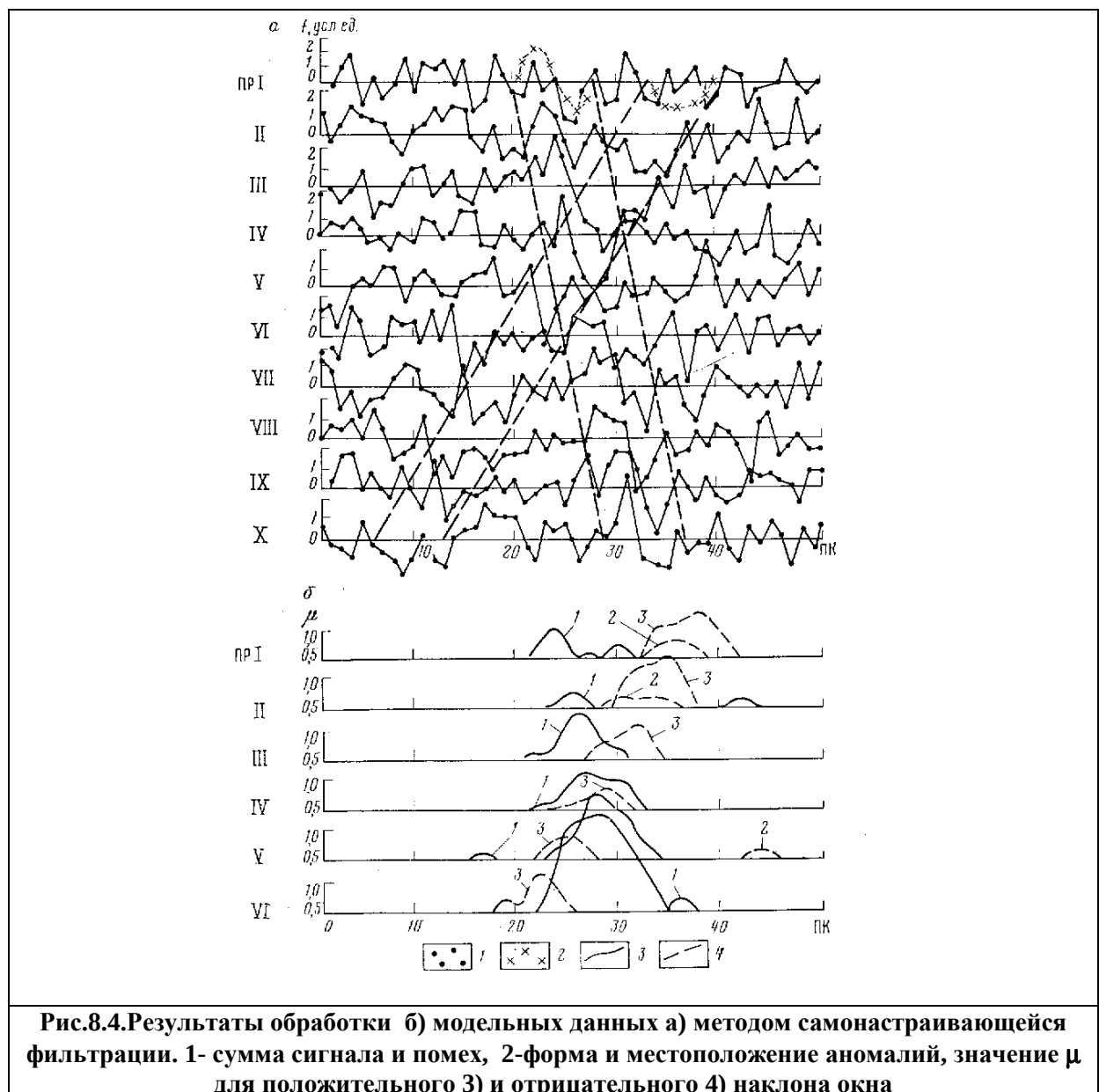
m (N-1)m	5	10	15	20
10	3.33	3.00	2.84	2.77
15	2.90	2.56	2.40	2.33
20	2.71	2.36	2.20	2.12
30	2.53	2.20	2.01	1.93
60	2.37	2.02	1.84	1.75

Величина $\mu_{пор.}$ связана с пороговыми значениями статистики Хоттелинга как $\mu = d / N$. Так, для окна, содержащего $m=5$ и $N=3$ точек, пороговое значение $\mu_{пор.} = d/N = 3.33/3 = 1.11$.

Вычисление отношения (8.20) осуществляется при разных наклонах скользящего окна, что обеспечивает обнаружение сигналов различного простираения при значениях $\mu > \mu_{\text{пор.}}$. При этом форма сигнала может существенно изменяться на разных участках исследуемой площади, однако при обнаружении сигнала такое изменение не имеет значения, поскольку лишь необходимо, чтобы величина μ была бы больше $\mu_{\text{пор.}}$.

Аналогично не имеет значения изменение интенсивности помех σ^2 , так как снова необходимо лишь выполнение условия $\mu > \mu_{\text{пор.}}$.

Используя распределение значений $\mu_{ki} > \mu_{\text{пор.}}$ по площади, можно найти оценку формы сигнала на любых интервалах исследуемой площади, если перемножить исходные значения поля f_{ki} на значения $\mu_{ki} > \mu_{\text{пор.}}$.



8.7. Многомерные аналоги метода обратных вероятностей и самонастраивающейся фильтрации.

В данном разделе рассматриваются методы обнаружения слабых многопризнаковых геофизических аномалий, которые являются многомерными аналогами способов обратных вероятностей и самонастраивающейся фильтрации. Слабыми многопризнаковыми аномалиями будем называть такие аномалии, энергетическое отношение которых

$$\rho = \sum_{j=1}^N \vec{a}_j S^{-1} \vec{a}_j \quad (8.21)$$

меньше единицы. Здесь N - число аномальных точек, $\vec{a}_j$ - значения многопризнаковой аномалии и S - оценка ковариационной матрицы по значениям многопризнаковой аномалии. Отдельные компоненты таких аномалий по отдельным признакам практически не выделяются визуально, и их амплитуда соизмерима или меньше уровня осложняющих аномальные эффекты помех.

8.7.1. Многомерный способ обратных вероятностей.

Математическая модель многомерного аналога способа обратных вероятностей состоит в следующем. Пусть имеется сеть наблюдений размером в M профилей и N пикетов. В каждой точке наблюдения значения представлены вектором $\vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$, отдельные компоненты которого являются значения по различным геофизическим полям или их трансформантам (признакам). Считается, что наблюдения в отдельной i -ой точке представлены либо суммой многопризнаковой аномалии $\vec{a}_i = \{a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{pi}\}$ и помехи $\vec{n}_i = \{n_{1i}, n_{2i}, \dots, n_{pi}\}$. т.е. $\vec{f}_i = \vec{a}_i + \vec{n}_i$. либо только помехой, т.е. $\vec{f}_i = \vec{n}_i$. На векторную помеху накладывается условие о ее p -мерном нормальном распределении с нулевым вектором среднего и ковариационной матрицей S .

Кроме того, предполагается некоррелированный характер помехи каждого из признаков по площади наблюдений. Как и в одномерном случае, для построения алгоритма обработки необходима априорная информация о параметрах многопризнаковой аномалии и о величине дисперсии помехи по каждому признаку.

На основе описанной модели наблюдений, задача обнаружения p -мерной многопризнаковой аномалии формулируется следующим образом: для имеющейся последовательности многопризнаковых наблюдений $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_m\}$, требуется

определить, являются ли наблюдения суммой известной по форме многопризнаковой аномалии (заданной в m точках) и p -мерной помехи (гипотеза H_1), или же эти наблюдения представлены лишь помехой по каждому из признаков (гипотеза H_0).

По аналогии с одномерным вариантом способа обратных вероятностей формула 8.14. для расчета коэффициента правдоподобия L и проверки гипотезы H_1 будет иметь вид:

$$P(F/H_1) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |S|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\vec{f}_i - \vec{a}_i)S^{-1}(\vec{f}_i - \vec{a}_i)'\right] \quad (8.22)$$

соответственно для нулевой гипотезы H_0 :

$$P(F/H_0) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |S|}} \exp\left[-\frac{1}{2}\vec{f}_i S^{-1}\vec{f}_i'\right] \quad (8.23)$$

Коэффициент правдоподобия в этом случае равен:

$$L = \frac{P(F/H_1)}{P(F/H_0)} = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (\vec{f}_i - \vec{a}_i)S^{-1}(\vec{f}_i - \vec{a}_i)' + \vec{f}_i S^{-1}\vec{f}_i'\right]$$

Поскольку ковариационная матрица помехи симметрична, то справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned} L &= \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (\vec{f}_i - \vec{a}_i)S^{-1}(\vec{f}_i - \vec{a}_i)' + \vec{f}_i S^{-1}\vec{f}_i'\right] = \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^m \vec{f}_i S^{-1}\vec{a}_i' - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \vec{a}_i S^{-1}\vec{a}_i'\right\} \end{aligned}$$

Согласно критерию максимального правдоподобия при выполнении неравенства $L > 1$ будет справедлива гипотеза H_1 . в противном случае справедлива гипотеза H_0 . Выполнение неравенства $L > 1$ эквивалентно выполнению неравенства:

$$\sum_{i=1}^m \vec{f}_i S^{-1}\vec{a}_i' > \sum_{i=1}^m \vec{a}_i S^{-1}\vec{a}_i'$$

Переход от коэффициента правдоподобия к апостериорной вероятности наличия аномалии осуществляется по формуле Байеса.

$$P(H_1/F) = L/(L+1)$$

При $P(H_1/F) > 0.5$ принимается решение о наличии многопризнаковой аномалии $\vec{a}_i, i = 1, 2, \dots, m$, при $P(H_1/F) < 0.5$ - об ее отсутствии. Надежность обнаружения аномалии γ определяется через интеграл вероятности по аналогии с одномерным случаем с использованием величины R из (8.21):

$$\gamma = \phi(\sqrt{\rho}/2)$$

8.7.2. Многомерный способ самонастраивающейся фильтрации.

Математическая модель многомерного аналога способа самонастраивающейся фильтрации состоит в том, что, как и в одномерном случае, рассматривается окно размером в n -пикетов и m -профилей на прямоугольной сети наблюдений размером в M профилей и N пикетов. Остальные предпосылки относительно свойств помехи и наблюдаемых данных полностью согласуются с общей моделью, рассмотренной в предыдущем разделе.

При различных расположениях окна (различных наклонах окна по отношению к простиранию профилей) проверяется нулевая гипотеза о средних значениях во всех столбцах окна. Отличием от одномерного случая является то, что значения в окне образуют векторы размерности p , где p число признаков. Модель поля при отсутствии аномалий определяется многомерной нормально распределенной помехой с нулевым вектором среднего $\vec{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ и ковариационной матрицей S (гипотеза H_0). При наличии аномалии - суммой многопризнаковой аномалии a и той же помехи (гипотеза H_1). Считается, что значение ковариационной матрицы неизвестно. Окончательное выражение для статистики критерия F для проверки гипотез H_0 и H_1 имеет вид [6]:

$$F = \frac{nm - n - p + 1}{(n-1)pn(m-1)} Sp \left(\sum_{j=1}^n \vec{f}_{*j} \vec{f}_{*j}^T S^{-1} \right) =$$

$$= \frac{nm - n - p + 1}{(n-1)p(nm - n)} \sum_{j=1}^n \vec{f}_{*j}^T S^{-1} \vec{f}_{*j}$$

где $\vec{f}_{*j}$ - оценка вектора среднего в j -ом столбце окна;

m - количество строк в окне;

n - количество столбцов в окне;

S - оценка ковариационной матрицы в окне;

Sp - знак следа матрицы.

Гипотеза H_0 о равенстве векторов средних в столбцах окна нулевому вектору отклоняется (то есть принимается решение о наличии аномалии), если: $F \geq F_{g_1, g_2, \alpha}$. где $F_{g_1, g_2, \alpha}$ - критическое значение F -распределения со степенями свободы:

$$g_1 = \frac{(n-1)p(nm - n - p)}{nm - (n-1)p - 2}$$

$$g_2 = nm - n - p + 1$$

на уровне значимости α .

ГЛАВА IX. Обработка комплексных геофизических наблюдений.

9.1. Методы классификации многомерных наблюдений.

Существующие в настоящее время классификационные алгоритмы, основанные на принципах самообучения, можно разделить на три основных группы – эвристические, корреляционные и статистические. Эвристические методы классификации основаны на разбиении диапазона значений каждого признака на заданное число градаций и в большинстве своем сводятся к расчету комплексного параметра, который является линейной комбинацией соответствующего номера интервала градации по совокупности анализируемых признаков в каждой точке наблюдений. Существенным недостатком эвристических методов является то обстоятельство, что они строятся в предположении независимости отдельных признаков между собой. Однако, наличие отдельных недостатков алгоритмов классификации не уменьшает их значимости в обработке геолого-геофизических наблюдений.

Рассматриваемые способы классификации многопризнаковых геофизических наблюдений относятся к числу эвристических и направлены на решение задачи выделения в многомерном пространстве компактных групп точек. В прикладных задачах автоматической классификации (при отсутствии эталонных объектов) эвристические алгоритмы стали применяться одними из первых и до сих пор сохраняют большое значение благодаря наглядности полученных результатов и, как правило, простоте реализации.

Разделение рассматриваемой совокупности признаков на однородные (в смысле вектора среднего) группы называется ***классификацией***. При этом термин “классификация” используют, в зависимости от контекста, для обозначения, как самого процесса разделения, так и его результата. Это понятие тесно связано с такими терминами, как группировка, типологизация, систематизация, дискриминация, кластеризация, и является одним из основополагающих в практической и научной деятельности человека.

В общей постановке задачи проблема классификации объектов заключается в том, чтобы всю анализируемую совокупность признаков, представленную в виде матрицы, разбить на сравнительно небольшое число однородных, в определенном смысле, групп или классов. Понятие однородности основано на предположении, что геометрическая

близость двух или нескольких объектов означает близость их “физических” состояний, их сходство.

В общем случае понятие однородности объектов определяется заданием правила вычисления величины ρ_{ij} , характеризующей расстояние $d(X_i, X_j)$ между объектами X_i и X_j из исследуемой совокупности. Если задана функция $d(X_i, X_j)$, то близкие в смысле этой метрики объекты считаются однородными, принадлежащими к одному классу. Естественно, при этом необходимо сопоставление $d(X_i, X_j)$ с некоторым пороговым значением, определяемым в каждом конкретном случае по-своему.

9.1.1. Метод динамических сгущений (k-средних).

Достаточно известный и эффективный метод классификации многомерных наблюдений на заранее известное число классов k в условиях минимума информации о начальных центрах классов, известный под названием k -средних или k -ближайших соседей. Блок схема алгоритма заключается в следующем:

-для всех p обрабатываемых признаков оценивается значение среднеквадратического отклонения σ_i , минимального $Y_{\min}^i$ и максимального $Y_{\max}^i$, $i = 1, \dots, p$ значений;

-каждый $f_i, i = 1, \dots, p$ признак нормируется на соответствующее значение среднеквадратического отклонения $\bar{f}_i = f_i / \sigma_i$;

-случайным образом выбирается k векторов размерности p начальных центров классов $\vec{C}_j = \{c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{pj}\}, j = 1, \dots, k$. причем отдельные случайно выбранные компоненты каждого вектора удовлетворяют неравенству $\frac{Y_{\min}^i}{\sigma_i} < c_{ij} < \frac{Y_{\max}^i}{\sigma_i}$;

-осуществляется классификация нормированных многопризнаковых наблюдений исходной сети на классы, при этом значение в каждой точке сети $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_p\}$ относится к классу m . если расстояние от центра этого класса до точки является минимальным $r_m = \text{MIN}\{r_1, \dots, r_k\}$;

-по результатам классификации определяются новые вектора центров классов. $\vec{C}^n = \{c_{1j}^n, \dots, c_{pj}^n\}, j = 1, \dots, k$. при этом каждая компонента отдельного вектора m является оценкой среднего $c_{im}^n = \frac{1}{n_m} \sum_{j=1}^{n_m} x_j^m, i = 1, \dots, p$. рассчитанной по n_m точкам, попавшим в класс m после классификации. проведенной на предыдущем шаге алгоритма;

-в выбранной метрике оцениваются расстояния между старыми и новыми центрами классов $\bar{R}_j(\bar{C}, \bar{C}^n), j = 1, \dots, k$;

-если хотя бы для одного из k классов расстояние больше заранее выбранной величины $\bar{R}_j > \varepsilon$, то старым векторам центров классов присваиваются значения новых $\bar{C}_j = \bar{C}_j^n, j = 1, \dots, k$ и процедура повторяется с шага, на котором осуществляется классификации наблюдений. В противном случае, когда для всех классов выполняется неравенство $\bar{R}_j(\bar{C}, \bar{C}^n) \leq \varepsilon$, результаты последней итерации считаются окончательными.

Рассмотренный итерационный алгоритм обладает довольно быстрой сходимостью. Основным его недостатком является недостаточный учет корреляционных связей признакового пространства и необходимость задания конечного числа классов.

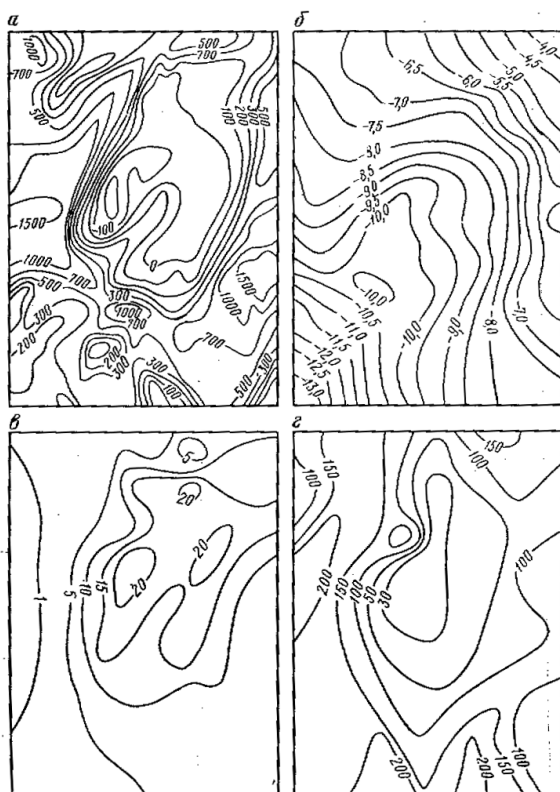


Рис.9.1. Геофизические поля над Бенкалинским меднопорфировым месторождением: а) Z_a в нТ, б) Δg в мГ, в) η_k в %, г) ρ_k в Ом·м.



Рис.9.2. Результат классификации геофизических полей методом k-средних на два а), три б), четыре в) и пять г) классов.

9.1.2. Методом общего расстояния.

Алгоритм классификации методом общего расстояния является типичным примером эвристического алгоритма, основная идея которого заключается в том, что совокупность объектов, находящихся на одинаковом расстоянии от каждого из k эталонов, образует компактную группу.

Пусть для классификации имеется выборка $A_1, \dots, A_N$, представленная в виде матриц размером в m профилей и n пикетов, причем каждый объект этой выборки характеризуется вектором признаков $a_{ij} = (a_{ij}^{(1)}, \dots, a_{ij}^{(p)})$. Рассмотрим p -мерное признаковое пространство X^p вместе с функцией $d(X_i, X_j)$, задающей расстояние (или степень близости). Здесь степень близости определяется как обычное евклидово расстояние:

$$d_E(X_i, X_j) = \sqrt{(x_i^{(1)} - x_j^{(1)})^2 + (x_i^{(2)} - x_j^{(2)})^2 + \dots + (x_i^{(p)} - x_j^{(p)})^2}.$$

Тогда схема алгоритма имеет вид:

-для всех p обрабатываемых признаков оценивается среднее значение:

$$S_k = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ijk}}{nm}.$$

-каждый признак центрируется на соответствующее значение среднего $a_{ijk} = a_{ijk} - S_k$.

-для всех p обрабатываемых признаков оценивается значение среднеквадратического отклонения:

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ijk}^2}{nm}.$$

-каждый признак нормируется на соответствующее значение среднеквадратического отклонения:

$$a_{ijk} = a_{ijk} / \sigma_k$$

-для каждого из признаков выбирается k эталонов $D_0^{(1)}, \dots, D_0^{(k)}$.

-рассчитывается матрица (для каждого признака) средних расстояний от объекта до эталонов.

-выбирается общий порог d_0 .

-осуществляется классификация приведенных к однородности признаков по правилу, каждому объекту X_i ставится в соответствие код из k двоичных символов $\varepsilon_i = (\varepsilon_i^{(1)}, \dots, \varepsilon_i^{(k)})$. где $\varepsilon_i^{(l)} = 1$, если $d_E(a_{ij}, D_0^{(l)}) \leq d_0$. где $l=1, \dots, k$ и $\varepsilon_i^{(l)} = 0$ в противном случае.

Выборка разбивается на классы. Объекты, относящиеся к одному классу, имеют одинаковый код.

Существенно повысить качество конечной классификации данного алгоритма позволяет учет следующих замечаний:

1. Нормировка данных по каждому признаку только на обычную дисперсию, из-за специфики геофизических наблюдений, для которых характерно наличие “ураганных” значений, не позволяет решать задачу нормировки корректно. Как показали исследования, качество классификации значительно улучшается, если стандартную нормировку на дисперсию, дополнить нормировкой на межэталонную дисперсию:

$$D_{\text{м.э.}} = \frac{\sum_{l=1}^k (D_0^{(l)} - \bar{D}_0)^2}{k}.$$

2. Мера сходства, также является важнейшим фактором качества классификации. Наиболее эффективным является следующий подход решения этой задачи:

- по каждому признаку рассчитываются средние расстояния от всех анализируемых точек исходной сети до эталонов $s_1 = \dots = s_p$.

- находится общее среднее по всем признакам $\bar{S}$.

- величина $0.3 \bar{S}$, в качестве меры сходства, как показало опробование алгоритма на модельных и реальных данных, является наиболее приемлемым.

9.1.3. Метод разделения многомерных, нормальных смесей (По Петрову А.В.).

Алгоритм, позволяет провести классификацию многопризнаковых геофизических наблюдений на однородные, в смысле вектора среднего области, без знания конечного числа классов и с учетом корреляционных характеристик всего признакового пространства.

Алгоритм построен на принципах самообучения и позволяет решать задачу разделения сейсмического разреза на области с одинаковым значением вектора среднего по совокупности признаков. Конечное число классов (однородных в смысле вектора среднего областей) определяется автоматически в процессе работы алгоритма. Суть алгоритма заключается в следующем.

Считается, что вся совокупность наблюдений, включающая M трасс по N отсчетов на каждой, может быть разбита на J областей, в которых данные распределены многомерно нормально с вектором математического ожидания $\vec{m}$ и матрицей ковариаций S . Размерность векторов $\vec{m}$ и матрицы S совпадает с количеством анализируемых признаков p . Относительно ковариационной матрицы S

предполагается, что она постоянна во всех областях. Вектора среднего $\vec{m}$ для различных областей отличаются друг от друга, то есть

$$\vec{m}_1 \neq \vec{m}_2 \neq \dots \neq \vec{m}_J.$$

Число таких областей J - неизвестно. Естественно, что оно не может быть меньше единицы ($J > 0$) (в случае равенства единице все данные относятся к одной области, классу) и не превышает общего числа точек наблюдений $J \leq MN = n$ (в случае равенства каждая область содержит только лишь один объект наблюдения, то есть точку). Задача заключается в разбиении исследуемой площади наблюдений на области, однородные в смысле вектора среднего, по всем признакам.

Для решения этой задачи предлагается алгоритм, основанный на проверке многомерной статистической гипотезы, в котором можно выделить два основных этапа:

1. На первом этапе проверяется гипотеза о принадлежности двух различных областей к одному классу. Первоначально считается, что число таких областей равно количеству точек наблюдений, то есть каждая точка - класс. При этом, если два проверяемых класса удовлетворяют этой гипотезе на определенном уровне значимости, то они объединяются в один класс. Первоначальное число классов уменьшается на единицу и пересчитывается оценка ковариационной матрицы S , которая имеет важнейшее значение для расчета статистики критерия, соответствующего данной гипотезе. Этап завершается, когда гипотеза об объединении всевозможных пар классов не выполняется.

2. Второй этап заключается в реклассификации данных, разделенных на классы в результате первого этапа. Затем проводится повторение первого этапа, но при этом с самого начала в статистике критерия для проверки гипотезы объединения двух различных классов уже используется оценка ковариационной матрицы S , полученная на первом этапе обработки.

Как следует из структуры описанного алгоритма для его реализации необходимо получить многомерный статистический критерий для проверки гипотезы о том, что два любых класса m и l из J существующих, обладают одним и тем же вектором среднего, то есть гипотезу

$$\vec{m}_m = \vec{m}_l.$$

В работе [5] подробно описывается построение критериальной статистики для проверки сформулированной выше гипотезы, поэтому ниже приводится лишь окончательное выражение:

$$F = \frac{n-J-p+1}{p(n-J)} \frac{n_m n_l}{n_m + n_l} (\vec{m}_m - \vec{m}_l) S^{-1} (\vec{m}_m - \vec{m}_l)'.$$

здесь n - общее число точек;

n_m и n_l – число точек в проверяемых классах;

J – общее число классов;

p – число анализируемых признаков;

$$\vec{m}_m = \frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} f_{ji} \text{ - оценка вектора среднего в } m \text{ -ом классе;}$$

$$\vec{m}_l = \frac{1}{n_l} \sum_{i=1}^{n_l} f_{ji} \text{ - оценка вектора среднего в } l \text{ -ом классе;}$$

$$S = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^{n_j} (\vec{f}_{jk} - \vec{m}_j)(\vec{f}_{jk} - \vec{m}_j)' \text{ - оценка ковариационной матрицы по всем классам;}$$

n_j - число точек в j -ом классе.

Гипотеза H_1 о равенстве векторов средних в классах l и m считается справедливой на уровне значимости α , если выполняется неравенство: $F < F_{g_1, g_2, \alpha}$, где $F_{g_1, g_2, \alpha}$ - критическое значение F - распределения со степенями свободы: $g_1 = p$, $g_2 = n - J - p + 1$.

9.2. Методы распознавания образов в задачах интерпретации геофизических наблюдений.

Одной из актуальных задач разведочной геофизики является выделение геологического объекта по информации о параметрах полей, которые им индуцируются. Подобные задачи возникают при геолого-геофизическом районировании, обработке многоуровневых геофизических наблюдений и в других случаях, когда при интерпретации наблюденное поле сравнивается с эталонным фрагментом поля.

Существует ряд алгоритмов распознавания по данным комплексных геолого-геофизических наблюдений, в которых решение задачи коротко сводится к следующему. Первоначально проводится обучение на эталонных объектах по ряду геолого-геофизических признаков с целью оценки тех или иных параметров признаков. Затем по имеющейся информации о значениях параметров признаков в каждой точке площади исследования делается вывод о принадлежности точки к эталонному объекту. Этап обучения на эталонных объектах является одним из самых уязвимых мест рассматриваемых методов распознавания. Многообразие геолого-геофизической информации, обусловленное

изменением геологического строения в пределах даже одной площади, влияние различного рода помех очень часто не позволяют использовать результаты обучения на эталонных объектах для решения задач распознавания на других площадях со сходным геологическим строением.

В наибольшей степени сказанное проявляется при включении в процесс распознавания геофизических наблюдений. Именно поэтому геофизическая информация обычно используется далеко не полностью и сводится чаще всего к таким параметрам, как знак аномалии, значение величины среднего, степень изменчивости полей (дисперсия) и их производных.

Параметрами, характеризующими эталонный объект для предлагаемого алгоритма, являются двумерные поверхности, заданные в дискретных точках наблюдений прямоугольной сети. Каждая поверхность отражает форму проявления конкретного физического поля над эталонным объектом. Признаками могут быть значения различных геофизических полей, их производные, наблюдения на различных уровнях одного геофизического параметра, оцифрованная геологическая, петрофизическая и геохимическая информация. При построении алгоритма принимается аддитивная модель поля, при которой любое наблюдение является суммой комплексной аномалии и многомерной нормальной с нулевым вектором среднего помехи.

Существо предлагаемого алгоритма состоит в следующем. Без ограничения общности рассмотрим прямоугольное окно на анализируемой площади наблюдений размером m профилей и n пикетов и наклоном $q=0$. Пусть в каждой i -ой точке окна наблюдения являются p -мерными величинами (p —число анализируемых признаков) $f_i = (f_1, f_2, \dots, f_p)$, причем: $f_i = a_i + n_i$, где a_i - аномальная составляющая поля, n_i -многомерная нормальная помеха с нулевым вектором среднего и матрицей ковариаций S .

Очевидно, при совпадении формы комплексной аномалии в исследуемом окне от эталонного объекта a с наблюдаемым полем x , разность между ними есть не что иное, как помеха:

$$d_{kj} = x_{kj} - a_{kj} \text{ где } k=1,2,\dots, m; j=1,2,\dots, n.$$

где m – количество строк в окне, а n – количество столбцов.

Таким образом, решение вопроса распознавания комплексной аномалии от эталонного объекта сводится к проверке нулевой гипотезы H_0 о том, что значения разности d в столбцах и строках окна распределены нормально с нулевым вектором среднего и ковариационной матрицей S . т. е.

$$m_1 = m_2 = \dots m_m = m_{m+1} = \dots = m_{m+n}$$

где m_k , $k=1,\dots,m$ - вектор среднего разности d в строках окна;

$j=1.....n$ —вектор среднего разности d в столбцах окна.

Окончательное выражение для проверки гипотезы H_0 [4] имеет вид:

$$F = \frac{2nm - n - m - p + 1}{(n + m + 1)p(2nm - n - m)} \left(\sum_{i=1}^m n \bar{m}_i S^{-1} \bar{m}_i' + \sum_{i=1}^N n \bar{m}_{m+i} S^{-1} \bar{m}_{m+i}' \right)$$

здесь

$$\bar{m}_j = 1/n \sum_{i=1}^n \bar{d}_{ji} \quad \text{-оценка вектора среднего разности в } j\text{-ой строке окна } j=1.....m;$$

$$\bar{m}_{m+1} = 1/m \sum_{i=1}^m \bar{d}_{ji} \quad \text{-оценка вектора среднего разности в } i\text{-ом столбце окна}$$

$i=1.....n$.

S - оценка ковариационной матрицы в окне.

Гипотеза H_0 о наличии в окне эталонной комплексной аномалии считается справедливой на уровне значимости α , если выполняется неравенство $F < F_{g_1, g_2, \alpha}$, где $F_{g_1, g_2, \alpha}$ -критическое значение F -распределения со степенями свободы g_1 и g_2

$$g_1 = \frac{(n + m - 1)p(2nm - n - m - p)}{2nm - (n + m - 1)p - 2}$$

$$g_2 = 2nm - n - m - p + 1.$$

Перемещая окно вдоль профиля и по профилям, получим распределение критериальной статистики по всей площади наблюдения.

При использовании рассмотренного способа распознавания комплексных геофизических аномалий эталонную аномалию по комплексу признаков можно получить путем обучения на площадях с известным геологическим строением, либо путем решения прямой задачи по каждому признаку, а также создав банк элементарных аномалий, из которых путем линейных преобразований и различных комбинаций по признакам можно быстро получать комплексную аномалию с заданными энергией и геометрией. За эталонную аномалию можно принять фрагмент исследуемой площади с целью поиска аналогичных участков на всей площади. Особый интерес представляет распознавание при различных наклонах окна, так как при этом выделяются области в которых присутствует эталонный объект при различных его простираниях. Основные достоинства рассмотренного метода распознавания заключаются в следующем:

1.Алгоритм базируется на проверке многомерной статистической гипотезы, что позволяет наиболее полно использовать информацию о структуре межпризнаковой связи между различными геофизическими полями.

2. Исходной информацией является лишь форма аномалий, а в ряде случаев, когда эталоном служит фрагмент исследуемой площади, лишь контур комплексной аномалии. Оценка параметров помехи и ее влияния на полезный сигнал проводятся непосредственно в процессе распознавания.

3. В качестве признаков над эталонным объектом выступают геофизические поля, что позволяет наиболее полно учесть все их особенности при обработке.

4. Возможность изменения наклона окна делает алгоритм независимым от простираения объекта.

5. Независимость алгоритма от характера помех и применение банка элементарных аномалий значительно сокращают этап обучения и повышают мобильность алгоритма при обработке различных исследуемых территорий.

Основные недостатки метода сводятся к возможному невыполнению на практике предпосылок, заложенных в математической модели, а именно: принимаемая аддитивная модель наблюдаемого поля, предположение о нормальном распределении помехи и стохастическая независимость наблюдений.

9.3. Метод главных компонент при расчете комплексного параметра.

Исходными данными при комплексном анализе является совокупность нескольких полей и (или) их атрибутов в виде Nn -точек наблюдений. Алгоритм метода главных компонент сводится к реализации следующих процедур:

1. Вычисление коэффициентов корреляции r_{ij} для случайных величин x_i и x_j и составление по коэффициентам корреляции корреляционной матрицы

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad r_{ij} = r_{ji}$$

2. Составление матрицы $R - \lambda I$, где I - единичная матрица, и приравнивание определителя матрицы $|R - \lambda I|$ к нулю, т.е.

$$|R - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & r_{12} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & 1-\lambda & \dots & r_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} & \dots & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

3. Раскрытие определителя $R - \lambda I$ в виде линейного уравнения относительно λ и нахождение корней этого уравнения, являющихся собственными значениями матрицы $R: \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

Например, для двух случайных величин x_1 и x_2 имеем

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & r_{12} \\ r_{21} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1-\lambda)^2 - r_{12}^2 = 0; \quad 1-\lambda = \pm r_{12}. \quad \text{т.е. } \lambda_1 = 1 + r_{12}; \quad \lambda_2 = 1 - r_{12}.$$

Очевидно, что для матрицы R размерности N получим N собственных ее значений.

4. Нахождение собственных векторов a_{ij} матрицы R путем решения системы линейных уравнений вида:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda_j & r_{12} \dots r_{1N} \\ r_{21} & 1-\lambda_j \dots r_{2N} \\ \dots & \dots \\ r_{N1} & r_{N2} \dots 1-\lambda_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{Nj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1-\lambda_j)a_{1j} + r_{12}a_{2j} + \dots r_{1N}a_{Nj} &= 0; \\ r_{21}a_{1j} + (1-\lambda_j)a_{2j} + \dots r_{2N}a_{Nj} &= 0; \\ \dots & \dots \\ r_{N1}a_{1j} + r_{N2}a_{2j} + \dots + (1-\lambda_j)a_{Nj} &= 0 \end{aligned}$$

Для определенности решения этой системы необходима указанная выше нормировка коэффициентов a_{ij} в виде $\sum_{i=1}^N a_{ij}^2 = 1$.

В результате решения системы линейных уравнений для каждого собственного значения λ_j получаем свой собственный вектор $(a_{11}a_{21} \dots a_{N1}), \dots, (a_{1N}, a_{2N}, \dots, a_{NN})$.

Система собственных векторов является ортогональной и корреляционная матрица R оказывается расщепленной на N -ортогональных компонент.

5. Вычисление первой главной компоненты $y_1 = \sum_{i=1}^N a_{i1}x_i$, соответствующей максимальному собственному значению $\lambda_{\max}$. $\lambda_{\max}$ равно дисперсии первой главной компоненты, отражающей 70-90% всей энергии. т.е. $\lambda_{\max} = (0,7 \div 0,9) \sum_{j=1}^N \lambda_j$.

Первая главная компонента представляет значения комплексного параметра, определяемого в n -точках наблюдений, поскольку $y_1 = \sum a_{i1}x_i$ выражается в виде

произведения исходной матрицы x на собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{N1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ a_{N1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \cdot \\ y_{n1} \end{bmatrix}$$

Физический смысл весовых коэффициентов $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{N1})$ состоит в том, что эти коэффициенты определяют «вес» (вклад) каждого поля в общую величину комплексного параметра или информативность исходных полей.

Заметим, что случайная природа полей практически в методе главных компонент не используется, поэтому все перечисленные выше процедуры можно использовать и для аналитических, детерминированных функций. Так, в метеорологии метод главных компонент получил название как метод естественных ортогональных функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В заключении отметим, что в процессе изучения материала по курсу «Теоретические основы обработки геофизической информации» следует использовать программные средства по соответствующим разделам, что способствует лучшему усвоению достаточно сложных теоретических основ.

В качестве подобных программных продуктов можно рекомендовать пакет «MATLAB». В РГГРУ под руководством профессора Петрова А.В. разработаны обучающая система «Геостат» и компьютерная технология «КОСКАД 3D». Последняя включает шесть основных разделов:

«Сервис» - обеспечивает выполнение стандартных функций системы управления базой данных. С их помощью осуществляется ввод/вывод содержательной информации, объединение и фрагментация сетей, восполнение отсутствующих в отдельных точках наблюдения значений признака, интерполяция сетей, различные преобразования с данными и т.д.

«Графика» - включает графический интерфейс, позволяющий оперативно просматривать одномерную, двумерную и трехмерную информацию из базы данных на экране дисплея в виде растровых карт, отдельных графиков, карт графиков и т.д..

«Статистика» - программы данного раздела предназначены для расчета статистических, спектральных и корреляционных характеристик геополей. Анализ этих характеристик позволяет получить дополнительную, полезную информацию об исследуемом поле и правильно выбрать граф его дальнейшей обработки.

«Фильтрация» - в модулях данного раздела реализованы наиболее распространенные в разведочной геофизике линейные оптимальные фильтры, позволяющие решать задачи разложения поля на составляющие, исключения тренда, оценки формы слабых аномалий. Особый интерес представляют уникальные адаптивные фильтры, позволяющие корректно обрабатывать нестационарные по спектрально-корреляционным характеристикам геофизические поля.

«Обнаружение» - с помощью программ данного раздела решается задача обнаружения слабых аномалий, соизмеримых по амплитуде с уровнем помех, линейной и изометричной формы, по одному или нескольким признакам.

«Комплекс»- использование программ этого раздела позволяет решать задачи разбиения анализируемой площади на однородные области (классы) с равными средними значениями признаков, распознавания комплексных аномалий по эталонной аномалии. Кроме этого возможно проведение компонентного анализа многопризнаковых данных.

Для программ этой группы в качестве входной информации могут быть использованы значения различных геолого-геофизических признаков и их производных, полученных с помощью программ из других разделов комплекса.

Литература.

Основная:

1.Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации. М.. Недра. 1986.

2.Серкерев С.А. Спектральный анализ гравитационных и магнитных аномалий. М.Недра, 2002 г.

Дополнительная:

3.Петров А.В. Адаптивная фильтрация геополей. Геоинформатика. 1996. № 6.

4.Петров А.В. Распознавание комплексных геофизических аномалий. Геология и разведка. Изв.ВУЗов № 1 1996 г. стр.129.

5.Петров А.В. Методы многомерного дисперсионного анализа в алгоритмах комплексной интерпретации геофизических наблюдений. Геофизика № 1. 1996.

6.Петров А.В.. Никитин А.А. Многомерные аналоги способа обратных вероятностей и самонастраивающейся фильтрации. Геология и разведка Изв. ВУЗов N2 1989 г.

7.Никитин А.А.. Хмелевской В.К. Комплексирование геофизических методов. г.Тверь. Изд. ГЕРС. 2004.